

**UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ  
CARRIÓN**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA**



**TESIS**

**REPRESENTACIÓN DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS BASADAS  
EN LA TEORÍA DE GRAFOS**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN  
MATEMÁTICA APLICADA**

Presentado por:

Bach. Yan Carlos Páez Páez

**ASESOR:**

Asesor: Mg. Carlos Roberto Pesantes Rojas

**HUACHO – PERÚ**

**2023**

# REPRESENTACIÓN DE ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS BASADAS EN LA TEORÍA DE GRAFOS

## INFORME DE ORIGINALIDAD

17%

INDICE DE SIMILITUD

17%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

5%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

1	<a href="https://pt.scribd.com">pt.scribd.com</a> Fuente de Internet	4%
2	<a href="https://docplayer.es">docplayer.es</a> Fuente de Internet	2%
3	<a href="https://www.coursehero.com">www.coursehero.com</a> Fuente de Internet	1%
4	<a href="https://www.repositorioacademico.usmp.edu.pe">www.repositorioacademico.usmp.edu.pe</a> Fuente de Internet	1%
5	<a href="https://repository.usergioarboleda.edu.co">repository.usergioarboleda.edu.co</a> Fuente de Internet	1%
6	<a href="https://archive.org">archive.org</a> Fuente de Internet	1%
7	Submitted to Universidad Nacional Jose Faustino Sanchez Carrion Trabajo del estudiante	1%
8	<a href="https://repositorio.undac.edu.pe">repositorio.undac.edu.pe</a> Fuente de Internet	1%



## ASESOR

Carlos Roberto Pesantes Rojas  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

---

Mg. Carlos Roberto Pesantes Rojas

## MIEMBROS DEL JURADO

Mo. Jorge Luis Rojas Paz  
DOCENTE - UNJFSC

## Presidente



Universidad Nacional  
José Faustino Sánchez Carrión

Dr. Enrique U. Díaz Vega  
COMAP 1349  
DNU 317

## Secretario

Dr. Pedro James Vásquez Medina

## Vocal

## **DEDICATORIA**

Esta tesis se la dedico a mis padres, hermanas y mis hijos, por su apoyo incondicional, por su comprensión y motivación para seguir adelante y no rendirme a pesar de las adversidades.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios, por no dejar que me rinda y permitirme lograr este objetivo en mi vida.

Agradezco a mis padres por ser mis primeros maestros y siempre estar motivándome.

Agradezco a mis maestros de esta casa de estudios UNJFSC, en especial a quien en vida fue Mg. Pablo Alfredo Sifuentes Damián por todas sus enseñanzas brindadas.

Agradezco a mi asesor Mg. Carlos Roberto Pesantes Rojas, por ser mi guía, por el apoyo y tiempo dedicado en este trabajo de tesis.

## ÍNDICE

<b>RESUMEN</b> .....	7
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	9
<b>CAPÍTULO I</b> .....	11
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	11
1.1. Descripción de la Realidad Problemática.....	11
1.2. Formulación del Problema.....	12
1.2.1. Problema General .....	12
1.2.2. Problemas Específicos.....	12
1.3. Objetivos de la Investigación .....	13
1.3.1. Objetivo General .....	13
1.3.2. Objetivos Específicos .....	13
1.4. Justificación de la Investigación.....	13
1.5. Delimitación del Estudio .....	13
1.6. Viabilidad del Estudio.....	14
<b>CAPÍTULO II</b> .....	15
<b>MARCO TEÓRICO</b> .....	15
2.1. Antecedentes de la Investigación: .....	15
2.2. Bases teóricas.....	16
2.3. Definiciones Conceptuales.....	18
2.4. Formulación de la Hipótesis.....	36
2.4.1. Hipótesis General .....	36
2.4.2. Hipótesis Específicas.....	36
<b>CAPÍTULO III</b> .....	37
<b>METODOLOGÍA</b> .....	37
3.1. Diseño Metodológico .....	37
3.1.1. Tipo De Investigación .....	37
3.1.2. Nivel de Investigación.....	37
3.1.3. Diseño.....	37
3.1.4. Enfoque .....	38

3.2.	Población y Muestra .....	38
3.2.1.	Población .....	38
3.2.2.	Muestra .....	38
3.3.	Operacionalización de las Variables e Indicadores .....	38
3.4.	Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos .....	39
3.5.	Técnicas para el proceso de la Información.....	39
3.6.	Materiales y equipos.....	39
<b>CAPÍTULO IV</b>	.....	<b>40</b>
<b>RESULTADOS Y DISCUSIÓN</b>	.....	<b>40</b>
<b>CAPITULO V</b>	.....	<b>67</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	.....	<b>67</b>
<b>CAPITULO VI</b>	.....	<b>68</b>
<b>FUENTES BIBLIOGRÁFICAS</b>	.....	<b>68</b>
<b>ANEXOS</b>	.....	<b>69</b>
Matriz de Consistencia.....		<b>1</b>

## RESUMEN

La presente investigación tiene por **Objetivo:** Establecer una representación de estructuras algebraicas a través de la teoría de grafos. Como **Metodología:** el tipo de investigación es descriptivo, considerando a la vez dos métodos: el Método Deductivo y Método Hipotético-Deductivo, el nivel de investigación exploratorio, el diseño es de carácter básicamente explicativo basado en la discusión y el análisis crítico de sus propiedades, de enfoque cualitativo. En los **Resultados:** se establecieron proposiciones, propiedades y algunos ejemplos en las cuales se observó que hay una estrecha relación entre los grafos y las estructuras algebraicas, finalmente como **Conclusiones:** se obtuvo que mediante la teoría de grafos y sus diferentes caracterizaciones se pueden representar estructuras algebraicas, facilitando de manera practica la resolución de problemas.

**Palabras Claves:** Estructuras algebraicas, teoría de grafos.

## ABSTRAC

The **objective** of this research is: To establish a representation of algebraic structures through graph theory. As a **Methodology**: the type of research is descriptive, considering at the same time two methods: the Deductive Method and the Hypothetical-Deductive Method, the level of exploratory research, the design is basically explanatory based on the discussion and critical analysis of its properties. , qualitative approach. In the **Results**: propositions, properties and some examples were established in which it was observed that there is a close relationship between graphs and algebraic structures, finally as **Conclusions**: it was obtained that through graph theory and its different characterizations structures can be represented. algebraic, facilitating in a practical way the resolution of problems.

**Keywords:** Algebraic Structures, Graph Theory.

## INTRODUCCIÓN

Los avances científicos y tecnológicos han hecho posible en estos últimos años ubicar a la matemática discreta como uno de pilares fundamentales de las ciencias básicas, de manera especial en el tema de teoría de grafos, como consecuencia de esta teoría se ha desarrollado en el área de ingeniería, el dibujo computacional, en el área de administración está las técnicas de revisión y evaluación de programas (PERT) en donde se modelan y se optimizan los tiempos para su ejecución, también ha incursionado en el área de la informática y las telecomunicaciones ya que mediante estructuras estudiadas permite manipular y almacenar información en los ordenadores de forma discreta, además se cuenta con objetos, estableciendo relación entre ellos, analizando sus procesos en donde incluyen el uso de un numero finito de pasos. La teoría de autómatas y los lenguajes formales son también áreas importantes en donde se aplica estas estructuras.

Dada a la gran utilidad de la teoría de grafos debido a su naturaleza que esta presenta por ser figuras de fácil inspección visual y que permite un rápido análisis en los diferentes campos de la ciencia y tecnología, es necesario saber si estas estructuras y sus caracterizaciones permiten tener relación con los conceptos y definiciones existentes sobre estructuras algebraicas temas netamente abstractos y que serían de mucha ayuda para su estudio.

En la presente investigación y considerando que la Teoría de Grafos es una rama de las matemáticas necesaria, se ha podido realizar representaciones graficas de algunas de las caracterizaciones de las estructuras algebraicas, permitiendo de esta manera una mayor comprensión a los problemas planteados, en este sentido en este trabajo veremos existe una estrecha relación entre ciertas estructuras algebraicas y las propiedades de los grafos bajo isomorfismos.

Para una mejor comprensión del tema tratado fue conveniente distribuir de la siguiente forma: en el Capítulo I se establece la realidad problemática, objetivos y justificación de la investigación; en el Capítulo II se consideró el marco teórico, incluyendo los antecedentes, hipótesis y operacionalización de las variables; el Capítulo IV incluye los resultados y discusión de la investigación para finalmente en el Capítulo V establecer las conclusiones y recomendaciones.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

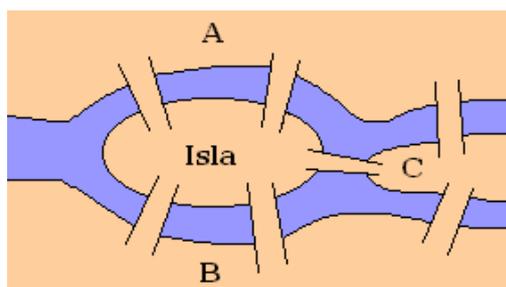
### 1.1. Descripción de la Realidad Problemática

La teoría de grafos hoy en día es una disciplina que se ha desarrollado vertiginosamente, especialmente en la tecnología como: los lenguajes de programación, circuitos electrónicos, almacenamiento de grandes cantidades de información, como por ejemplo la almacenada en una red social, que debido a la inmensa cantidad de datos tenemos diferentes formas de obtener la información lo que uno desee y sin tener que esperar mucho tiempo.

Las ideas básicas de la teoría de grafos fueron introducidas por el matemático Suizo Leonhard Euler allá por el siglo XVIII, según Piedra y Paternostro (2009):

Es considerado como uno de los más grandes de todos los tiempos. Realizo múltiples aportes a la matemática, siendo la Teoría de Grafos uno de los más importantes allá por los años 1736 con el trabajo de los puentes de Königsberg, dicho problema consistía en que existen dos islas en el Rio Pregel en tierras de Königsberg, y que existen 7 puentes que se cruzan entre dichas islas, por lo cual Euler se preguntó ¿Es posible dar un paseo empezando por cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida?. (pp. 11-12).

Tal como se muestra en la figura



Euler desarrolló dicho problema reemplazando cada parte de tierra firme por un punto llamado nodo o vértice y cada puente por una línea llamada arista. Al final de esto se llega a la misma pregunta ¿Se podrá recorrer todas las aristas del gráfico terminando en el mismo punto de partida sin repetir dichas aristas? Luego llego a conclusión de que no era posible puesto que el número de líneas que inciden en cada punto no es par, (condición necesaria para entrar y salir de un mismo punto). Es así que nació la teoría de grafos, (Piedra & Paternostro, 2009, p.12).

Debido a que existieron otros trabajos que influyeron en su desarrollo, tal como el de Gustavo Kirchhoff, quien publico leyes para calcular el voltaje y la corriente de los circuitos eléctricos; en dicho trabajo se estudiaron los grafos conexos de medida mínima, es decir, sin ciclos (arboles) con el objetivo desarrollar un método efectivo para el análisis de redes eléctricas entendido dicho análisis como el cálculo de la intensidad y la diferencia de potencial de cada elemento de la red (resistencia, bobina, condensador, etc), (Piedra & Paternostro, 2009)

Debido a la gran utilidad de los grafos y a la facilidad de su representación, en el presente trabajo de investigación se pretende relacionar estas representaciones con algunas estructuras algebraicas abstractas, estudiadas en pre grado y de esa manera hacer de esta teoría más dinámica y entendible, en tal sentido nos planteamos el siguiente problema:

## **1.2. Formulación del Problema**

### **1.2.1. Problema General**

¿Es posible representar estructuras algebraicas a través de la teoría de grafos?

### **1.2.2. Problemas Específicos**

¿Es posible representar algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo a través de la teoría de grafos?

¿Es posible representar algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial a través de la teoría de grafos?

### **1.3. Objetivos de la Investigación**

#### **1.3.1. Objetivo General**

Establecer una representación de estructuras algebraicas a través de la teoría de grafos.

#### **1.3.2. Objetivos Específicos**

Determinar una representación de algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo mediante la teoría de grafos.

Determinar una representación de algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial mediante la teoría de grafos.

### **1.4. Justificación de la Investigación**

La investigación se justifica en el sentido de que la teoría de grafos y su caracterización es una rama de las matemáticas discretas, en general de las matemáticas aplicadas, con esta teoría se busca representar de forma visual utilizando nodos o vértices y las relaciones entre éstos mediante aristas, estructuras abstractas y sus caracterizaciones como la teoría de grupos y espacios vectoriales, una de estas relaciones que se puede realizar es el grafo de Cayley en donde se prueba que cualquier grupo finito es isomorfo al grupo de automorfismos de un grafo.

### **1.5. Delimitación del Estudio**

La presente investigación está enmarcada dentro de la asignatura de matemática discreta específicamente en la teoría de grafos y algunas de sus caracterizaciones

existentes y poder relacionarlos con las estructuras algebraicas tanto de la teoría de grupos como de los espacios vectoriales ambos enmarcados en la asignatura de álgebra, mostrando así estrecha relación entre estas dos estructuras muy importantes en el área de matemáticas.

Por la naturaleza de su estudio, la investigación no tiene limitantes, temporales, espaciales ni sociales

#### **1.6. Viabilidad del Estudio**

El desarrollo de la investigación se justifica dado que para su viabilidad existe suficiente material bibliográfico a nivel de internet y en repositorios académicos tanto a nivel nacional como internacional, dichos materiales son suficientes para su desarrollo. Así mismo en cuanto a lo económico, esta investigación será autofinanciada por el mismo tesista, además para su desarrollo se cuenta con los suficientes materiales de escritorio y de impresión.

## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

#### 2.1. Antecedentes de la Investigación:

##### 2.1.1 Investigaciones Internacionales

Dragos, P. (2008). en su libro “*Eigenspaces of Graphs*” considera en la mayoría de sus resultados estudiados, que la relación entre las propiedades espectrales y las estructuras de un grafo. Indica además que otro origen de la teoría de los espectros de grafos se encuentra más allá de las matemáticas, por ejemplo, en química cuántica, un tratamiento aproximado de los no saturados hidrocarburos introducidos produce un gráfico-teórico modelo de las moléculas correspondientes en el que los valores propios de los gráficos representan los niveles de energía de ciertos electrones.

Iciar, A. (2017). en su investigación “*Introducción a la Teoría Algebraica de Grafos*”, de la Universidad de la Laguna, España, menciona que el objetivo de su trabajo es aplicar los resultados del álgebra lineal y la teoría de grupos a la teoría de grafos, con el fin de poder obtener mayor información y resolver diversos problemas de grafos, con métodos algebraicos. En primer lugar, se dan determinados conceptos relacionados a los grafos que se necesitaran a lo largo del trabajo, tal como se presentan grafos característicos para su estudio, y en particular el grafo lineal. Además el estudio del espectro de la matriz de incidencia y la matriz de adyacencia del grafo permitirán un mayor

acercamiento a estas estructuras, y junto con los autovalores se podrán precisar características de los grafos. Finalmente, a través de la acción del grupo de automorfismos de un grafo sobre un conjunto de vértices, quedan definidas distintas familias (vértices transitivos, arista transitivos). Se relacionan los grafos y los grupos mediante el grafo de Cayley y se prueba que cualquier grupo finito es isomorfo al grupo de automorfismos de un grafo.

Patiño, B. (2013), En su tesis de grado “*La Enseñanza de la Teoría de Grafos como Estrategia para desarrollar Procesos de Matematización*”, menciona en una de sus conclusiones que la enseñanza de la teoría de grafos tiene una influencia significativa en el desarrollo de procesos de matematización, mostrando el grupo experimental una mayor destreza en la utilización de los conceptos y teoremas propios de la teoría de grafos. Además, concluyó que la utilización de grafos puede ser aplicada en campos relacionados al conocimiento como la lingüística, investigación operativa, electricidad, genética, sociología, etc. Así mismo la teoría de grafos es un tema que facilita la didáctica en cursos básicos y al mismo tiempo permite una mayor rigurosidad matemática para un curso avanzado.

## **2.2. Bases teóricas**

Quispe, M. (2019). desarrolla una propuesta de versión de N-Grafos para la lógica proposicional intuicionista, adopta el mismo lenguaje proposicional de los N-Grafos, es decir, los conectivos lógicos:  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\neg$ , y la constante  $\perp$  para absurdo (o falsedad) y  $\top$  para verdadero. Las letras proposicionales A, B, C ... representan ocurrencias de fórmulas.

También se usa el conjunto de links de los N-Grafos, que representan los pasos atómicos en una derivación, pero claramente se deben modificar para garantizar el cumplimiento con las características intuicionistas del sistema. La lógica intuicionista constituye una sublógica de la lógica clásica, ya que en lógica clásica se puede hacer inferencias que no se pueden hacer en la lógica intuicionista. Específicamente, la lógica intuicionista rechaza el principio del tercero excluido ( $A \vee \neg A$ ). Este principio es claramente representado en los N-Grafos por el link lógico de introducción de la negación  $\neg$ -link, por ese motivo se remueve e introduce un nuevo link  $\neg$ -I. Más importante aún, se establece un dispositivo de indexación en las etiquetas para trazar las relaciones de dependencia entre las fórmulas del N-Grafo intuicionista. Las relaciones de dependencia determinan la restricción en la formulación de los links lógicos  $\neg$ -I y  $\rightarrow$ -I, que garantiza que sólo fórmulas válidas intuicionísticamente son derivadas en esta propuesta de N-Grafos. Del mismo modo que en los N-Grafos, la construcción de una derivación N-Grafo intuicionista sigue la definición de un grafo-de-prueba. Usa el conjunto de links lógicos y estructurales ilustrados en la Links lógicos y estructurales de los N-Grafos intuicionistas.

Capcha, V. (2015). En su investigación describe los fundamentos tanto teóricos como prácticos de la teoría de grafos como recurso didáctico en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento, se planteó como uno de los objetivos determinar la relación de la teoría de grafos con la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso. En dicha investigación enmarca la importancia que tiene la utilización adecuada de la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos en los estudiantes de Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco – 2014.

## 2.3. Definiciones Conceptuales

### 2.3.1. Vértice:

Un vértice llamado también nodo es un elemento fundamental en un grafo, son tratados como objetos inherentes dependiendo de la aplicación por el que un grafo se está usando, así, por ejemplo, en una red semántica se puede establecer grafos en donde los nodos o vértices representan conceptos.

### 2.3.2. Arista

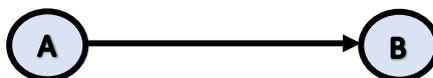
Una arista es la relación que existe entre los nodos o vértices en un grafo, se clasifican en dirigidas o no dirigidas, dependiendo si consideramos o no el orden de los vértices o nodos. En la práctica y según sea el caso el orden dependerá de cómo están relacionados los objetos.

### 2.3.3. Grafo:

Un grafo  $G$  es considerado como un par ordenado  $G = (V, A)$  donde  $V$  es un conjunto finito diferente del vacío, cuyos elementos son llamados nodos o vértices y  $A$  es un subconjunto de todas las parejas no ordenadas de elementos de  $V$  llamadas aristas.

### 2.3.4. Arista dirigida

Sea  $G = (V, A)$  un grafo, si  $(a, b) \in A$  y  $(b, a) \notin A$ , la arista  $(a, b)$  entre los nodos  $a$  y  $b$  se denomina dirigida.



### 2.3.5. Arista no dirigida

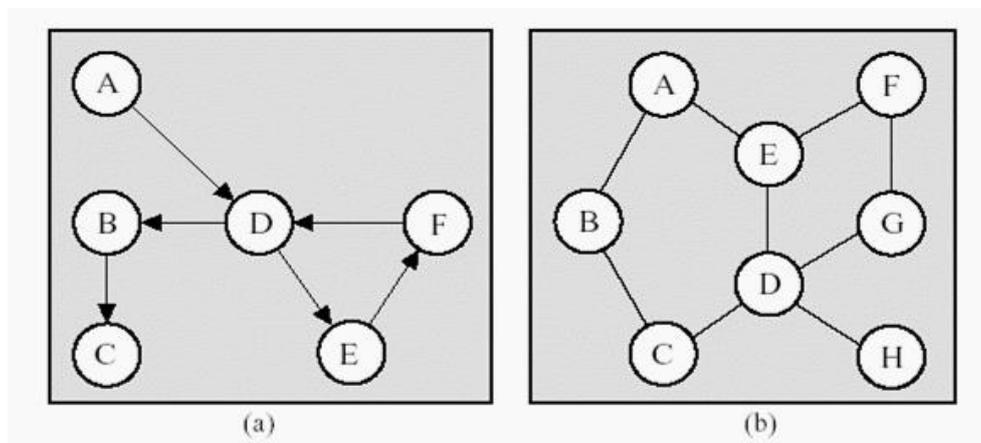
Sea  $G = (V, A)$  un grafo, si  $(a, b) \in A$  y  $(b, a) \in A$ , la arista  $(a, b)$  se denomina no dirigida.



### 2.3.6. Grafo dirigido y no dirigido

En un grafo  $G = (V, A)$  en el cual todas sus aristas son dirigidas se le llama grafo dirigido o dígrafo, y si todas sus aristas son no dirigidas es llamado grafo no dirigido o simplemente grafo.

**Ejemplo:**



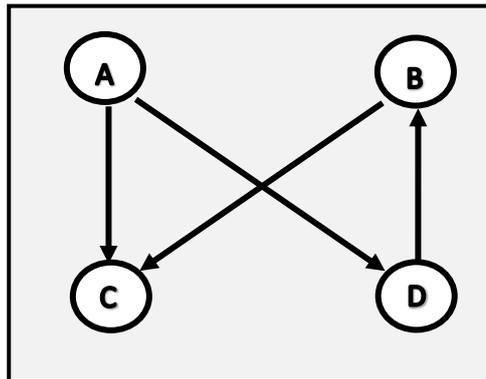
### 2.3.7. Conjunto adyacente. -

Sean:  $G = (V, A)$  un grafo dirigido y un nodo "u"; llamamos conjunto adyacente del nodo "u" al conjunto de nodos que directamente son alcanzables a partir de "u", es decir:

$$\text{Ady}(u) = \{ v \in V / (u, v) \in A \}.$$

Esta Definición permite que el grafo  $G = (V, A)$  pueda ser definido de forma equivalente como:  $G = (V, Ady)$ , donde  $V = \{ u, v, \dots, w \}$  está formado por todos los nodos y el conjunto  $Ady = \{ Ady(u), \dots, Ady(w) \}$ . Esta definición también es aplicable en grafos no dirigidos.

**Ejemplo:** Sea el grafo:



Observamos que en el grafo tiene asociado los siguientes conjuntos con nodos adyacentes:

$$Ady(A) = \{ C, D \}, \quad Ady(B) = \{ C \}, \quad Ady(C) = \phi \quad Ady(D) = \{ B \}.$$

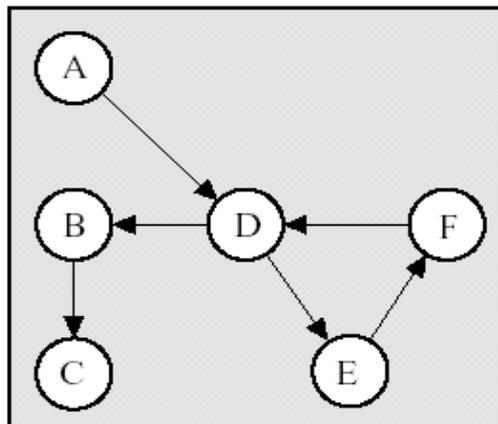
### 2.3.8. Camino entre dos nodos. -

Llamamos camino del nodo  $x_i$  al nodo  $x_j$  a la sucesión de nodos  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ , teniendo como nodo inicial a  $x_{i_1} = x_i$  y como nodo final a  $x_{i_r} = x_j$ , de modo que existe una arista del nodo  $x_{i_k}$  al nodo  $x_{i_{k+1}}$ , con  $k = 1, \dots, r - 1$ , es decir,  $x_{i_{k+1}} \in Ady(x_{i_k})$ .

### 2.3.9. Longitud de un Camino. -

Es el número de aristas que contiene dicho camino.

**Ejemplo:** Sea el siguiente grafo dirigido:



Entonces podemos afirmar que existen caminos del nodo A al nodo C:

- $A . D . B . C.$  de longitud 3,
- $A . D . E . F . D . B . C.$  de longitud 6,
- $A . D . E . F . D . E . F . D . B . C.$  de longitud 9.

### 2.3.10. Camino Cerrado. -

El camino  $( X_{i_1}, \dots, X_{i_r} )$  es llamado camino cerrado si el nodo inicial coincide con el final, es decir,  $X_{i_1} = X_{i_r}$ .

**Ejemplo:**

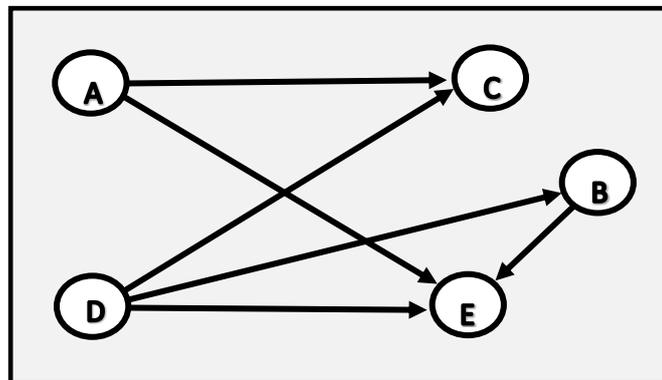
En el grafo dirigido anterior observamos que el camino D. E. F. D es un camino cerrado.

**Observación.** - Al camino cerrado en un grafo dirigido se le llama **ciclo**.

### 2.3.11. Grado Interno y Grado Externo. -

El Grado Interno del nodo “u” en un grafo dirigido es la cantidad de aristas que terminan en dicho nodo, sin embargo, el Grado Externo es la cantidad de aristas que salen de dicho nodo.

**Ejemplo.** - Si consideramos el siguiente grafo dirigido:



Tenemos:

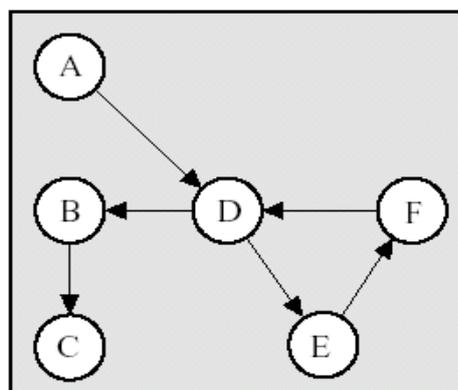
Nodo	Grado interno	Grado externo	Grado
A	0	2	2
B	1	1	2
C	2	0	2
D	0	3	3
E	3	0	3

**Observación.** - En un grafo no dirigido simplemente se llama grado de un nodo.

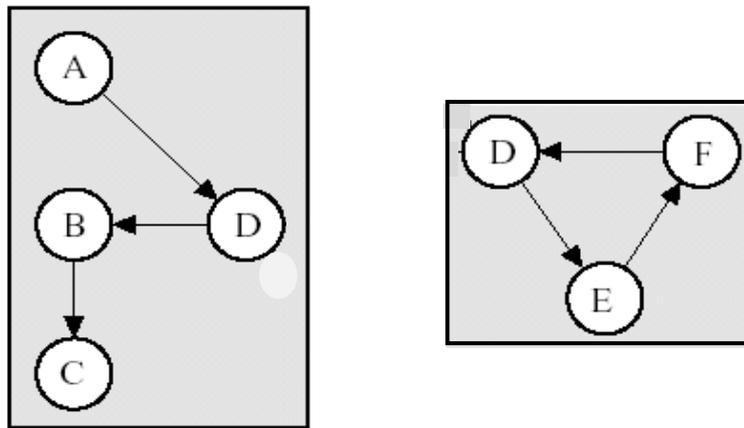
### 2.3.12. Subgrafo:

Un Grafo cuyo conjunto de aristas y vértices son subconjuntos del grafo  $G = (V, A)$  se le llama subgrafo del grafo G.

**Ejemplo:** Del siguiente grafo:



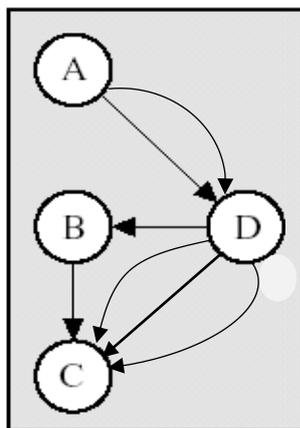
Tenemos como subgrafos a:



### 2.3.13. Multígrafo dirigido:

Un grafo  $G = (V, A)$  se dice que es grafo multígrafo o grafo multivariado si existe al menos dos nodos que están conectados por más de una arista.

**Ejemplo:**



Como podemos observar del anterior grafo los vértices A, D y C tienen más de una arista que los une.

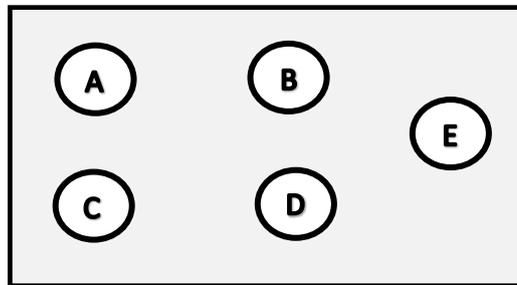
En la práctica un multígrafo podemos aplicar en redes de computadoras llamados servidores cuando se envía flujo de información grande de manera unidireccional, como

ilustra en el anterior grafo, el nodo D, cuando se necesita enviar gran cantidad de flujo de información de manera unidireccional hasta el nodo C.

### 2.3.14. Grafo Nulo:

El par  $N_n = (V, \phi)$  es llamado grafo Nulo de orden  $n \geq 1$  si es grafo de  $n$  - vértices o nodos con 0 - aristas.

**Ejemplo:** Tenemos para el grafo con  $n = 5$

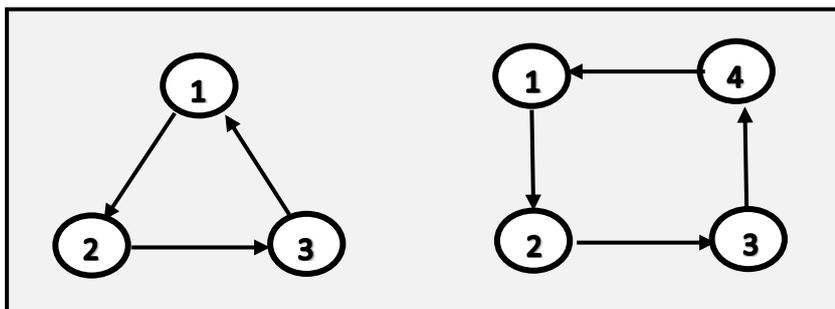


### 2.3.15. Grafo Ciclo:

$C_n = (V, E)$  es llamado grafo ciclo de orden  $n \geq 3$ , si  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es el conjunto de vértices con aristas  $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_n, v_1)\}$ , es decir:

$$E = \{(v_i, v_{i+1}) / i = 1, \dots, n - 1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$$

**Ejemplo:** Tenemos para  $n = 3$  y  $n = 4$  es decir los grafos  $C_3$  y  $C_4$ :

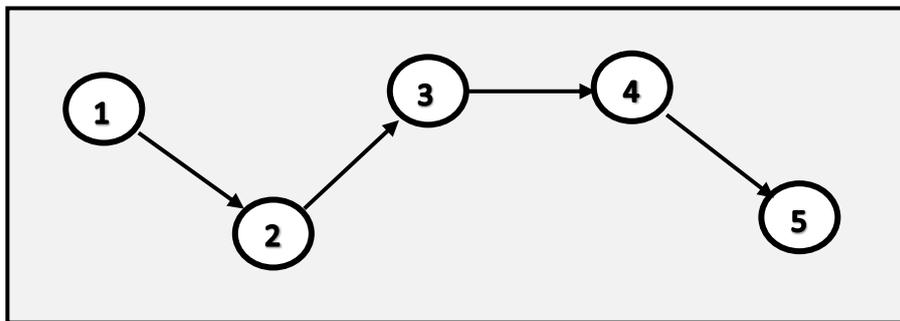


### 2.3.16. Grafo Trayecto:

El par  $T_n = (V, E)$  es llamado grafo trayecto de orden  $n \geq 2$ , si tiene como aristas al conjunto  $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$ .

Donde  $v_i \in V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , con  $i = 1, \dots, n$

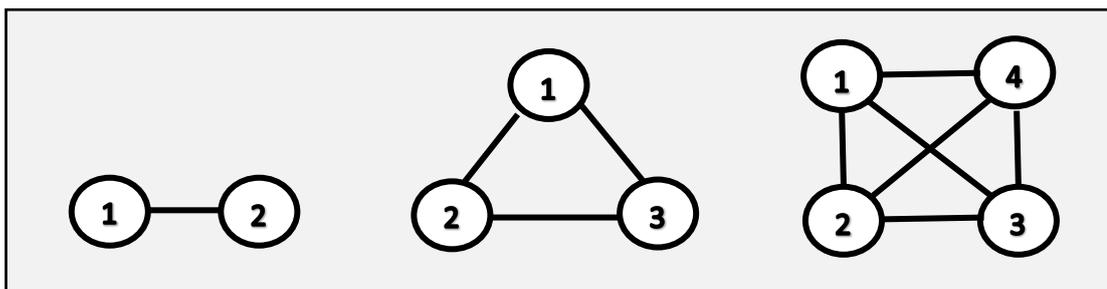
**Ejemplo:** Para  $n = 5$  tenemos el grafo:



### 2.3.17. Grafo Completo:

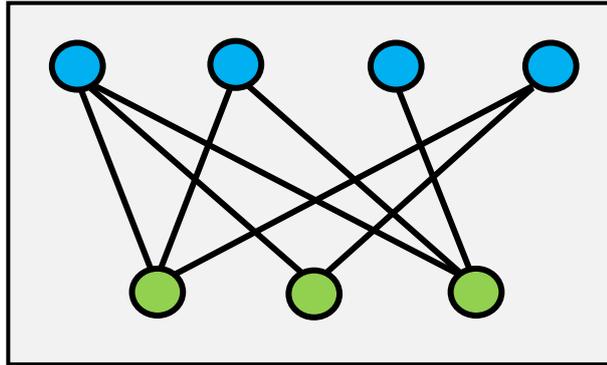
El grafo  $G = (V, E)$  de orden  $n$ , es llamado completo si tiene  $n$  vértices y todas las aristas posibles que conectan a sus vértices.

**Ejemplo:** Tenemos los grafos completos para  $n = 2$ ,  $n = 3$  y  $n = 4$



### 2.3.18. Grafo Bipartito:

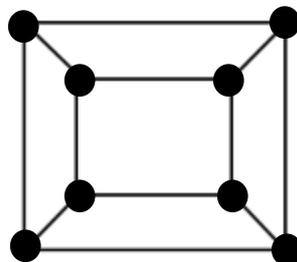
El grafo  $G = (V, E)$  es llamado bipartito si en el conjunto de sus vértices existe una partición es decir  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1 \cap V_2 = \phi$ , de tal manera que los vértices de  $V_1$  se conectan sólo con vértices de  $V_2$ ; es decir  $\{u, v\} \in E, u \in V_1 \leftrightarrow v \in V_2$



Esta misma definición se puede generalizar para grafos p-partidos, en este caso se puede realizar una partición  $(V_1, \dots, V_p)$  en el conjunto de vértices, de tal manera que las aristas conectan vértices que pertenecen a conjuntos diferentes de la partición, no existiendo aristas que conectan vértices de un mismo conjunto  $V_i$ .

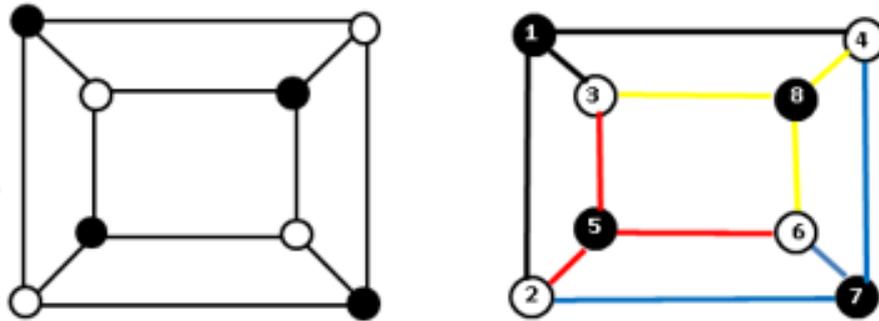
#### Ejemplo:

Analizar si el siguiente grafo es bipartito, de ser así, determinar su forma bipartida.

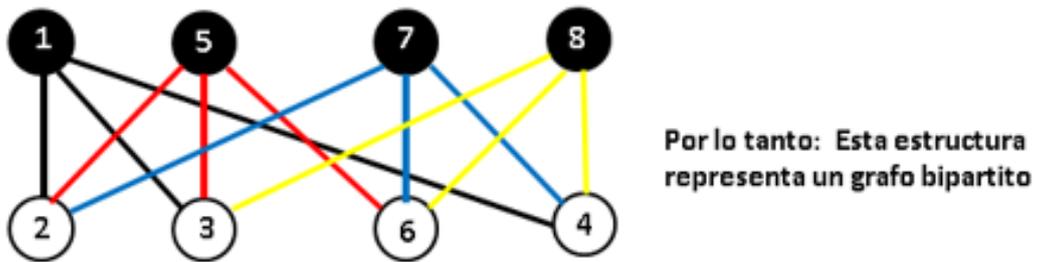


#### Solución:

Establecemos la partición de los vértices, usando los colores negro y blanco para diferenciar los grupos, es decir:

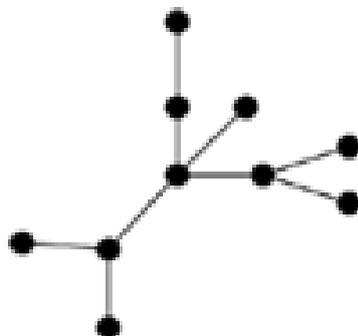


Luego se determina el grafo bipartito:



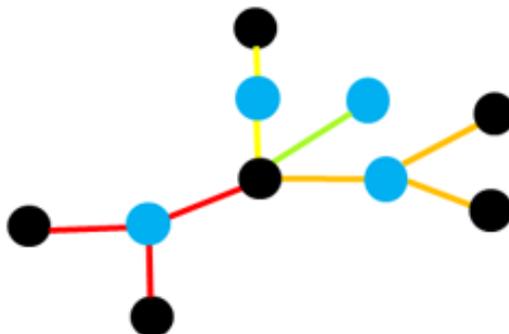
**Ejemplo:**

Determinar la distribución bipartida de los vértices, que se muestra en el siguiente grafo:

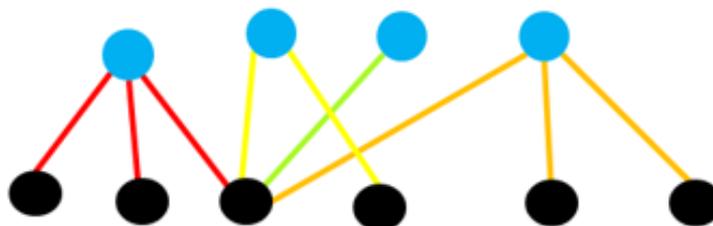


**Solución:**

Determinamos primero la partición del conjunto de vértices, tomando para diferenciar dicha partición colores diferentes, es decir:

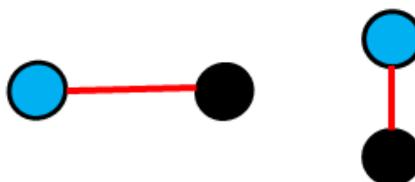


Luego establecemos las relaciones entre sus vértices, estableciendo así la estructura bipartita:



**Observación:**

Ningún grafo completo  $K_n$  es bipartito excepto para  $n = 2$ , el grafo  $K_2$



**2.3.19. Grafo Bipartito Completo:**

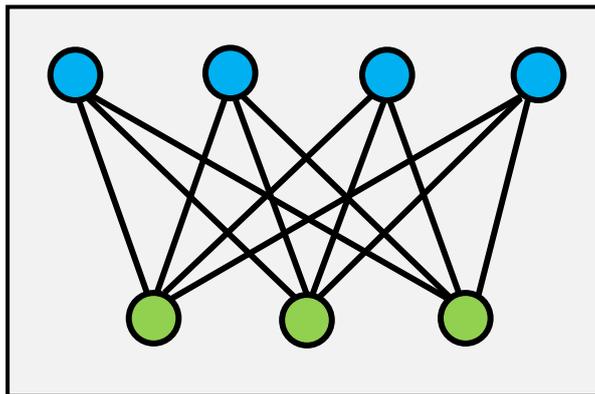
El grafo  $G = (V, E)$  bipartito, es llamado grafo bipartito completo para el cual denotamos por  $K_{n,m}$  si tiene todas las aristas posibles conectando vértices de la

partición  $V_1$  hasta la partición  $V_2$ . Dicho de otra manera todos los vértices de  $V_1$  son adyacentes a todos los vértices de  $V_2$ , es decir  $E = \{ (u, v) / u \in V_1, v \in V_2 \}$ .

**Observación:**

Los grafos bipartitos completos  $K_{n,m}$  son grafos  $m$ -regulares y el orden de dicho grafo es  $(n + m)$ .

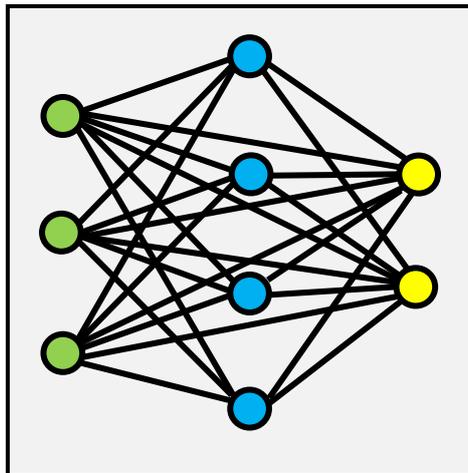
**Ejemplo:** Tenemos el grafo bipartito completo  $K_{4,3}$



**2.3.20. Grafo Bipartito Completo de n particiones:**

Un grafo  $k$ -partito es completo si tiene al conjunto de vértices particionado en  $k$  subconjuntos,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  y existen todas las aristas posibles, con la condición de que no haya ninguna arista que conecte a vértices de un mismo subconjunto. Este grafo es representado por  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$

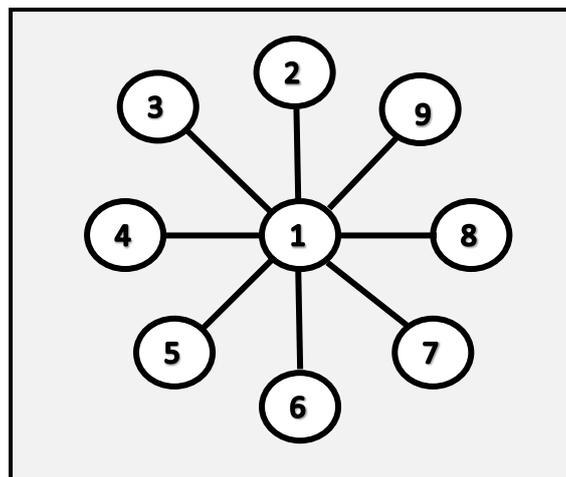
**Ejemplo:** Tenemos al grafo bipartito  $K_{3,4,2}$



### 2.3.21. Grafo Estrella:

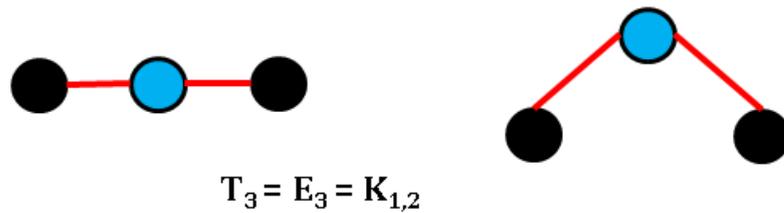
El grafo  $E_n$  de orden  $n$  con  $n \geq 3$  es el famoso grafo estrella, si es un grafo bipartido completo particular, donde  $E_n = K_{1,n-1}$

**Ejemplo:** Tomemos como ejemplo al  $E_9 = K_{1,8}$



### Ejemplo

Un caso especial de un grafo estrella es el grafo trayecto  $T_3$



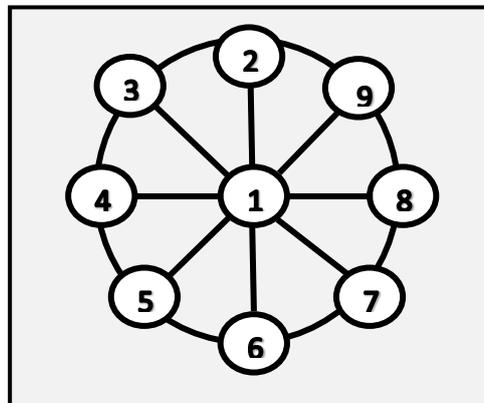
### 2.3.22. Grafo Rueda:

El grafo  $R_n$  de orden  $n$  con  $n \geq 4$  es llamado grafo rueda si tiene un único vértice de grado  $n-1$  y, si además se elimina este vértice y sus aristas incidentes, se obtiene un ciclo de orden  $n-1$ .

#### Observación:

Todo grafo rueda tiene orden  $n$  y su longitud es  $2(n-1)$

**Ejemplo:** Como ejemplo consideramos el grafo rueda de orden 8 siguiente:



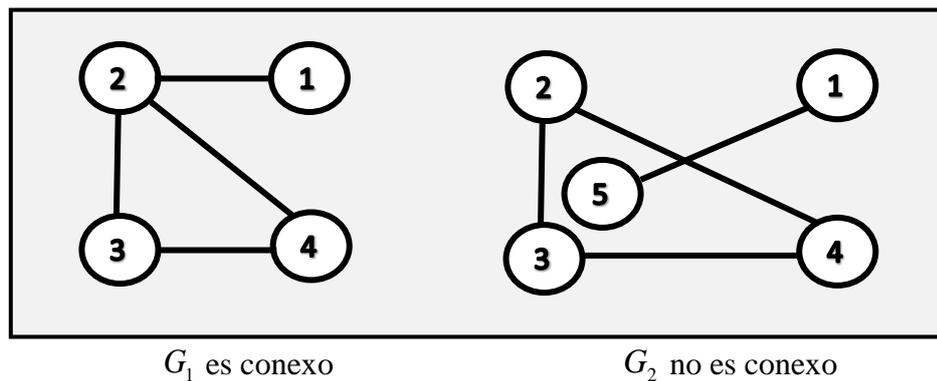
### 2.3.23. Conexión entre vértices

El concepto de conectividad es uno de los más importantes en la teoría de grafos, este concepto nace a raíz de establecer un recorrido entre dos vértices cualquiera de un grafo, además es importante para problemas donde es necesario realizar medidas sobre distancias en una red de distribución o de interconexión.

### 2.3.24. Grafo Conexo:

Un grafo  $G = (V, E)$  es llamado conexo si para cada par de vértices  $u, v$  de  $G$  existe entre ellos un camino.

**Ejemplo:** A continuación, mostramos un grafo conexo y otro no conexo.



Cuando un grafo  $G$  no es conexo, se deberá determinar aquellos subgrafos de  $G$  que son conexos y que son maximales respecto a esta propiedad.

### 2.3.25. Definición

Sea grafo  $G = (V, E)$  y definamos en el conjunto de vértices  $V$  una relación como:

$$\forall u, v \in V, u \equiv v \leftrightarrow \text{existe un camino de } u - v \text{ de } G.$$

### 2.3.26. Proposición

La relación definida anteriormente es una relación de equivalencia sobre el conjunto  $V$  de dicho grafo  $G = (V, E)$

**Demostración:**

**Reflexiva:**

$$\forall u \in V, u \equiv u \leftrightarrow \text{existe un camino de } u - u = 0 \text{ de } G$$

**Simétrica:**

Sean  $u, v \in V$ , entonces:

Si  $u \equiv v \leftrightarrow$  existe un camino  $u - v$  de  $G$

$\leftrightarrow$  existe un camino de  $v - u$  de  $G$

$\leftrightarrow v \equiv u$

**Transitiva:**

Sean  $u, v \in V$ ,  $u \equiv v \leftrightarrow$  existe un camino de  $u - v$  de  $G$

Además:

Sean  $v, w \in V$ ,  $v \equiv w \leftrightarrow$  existe un camino de  $v - w$  de  $G$

Aplicando la propiedad transitiva tenemos

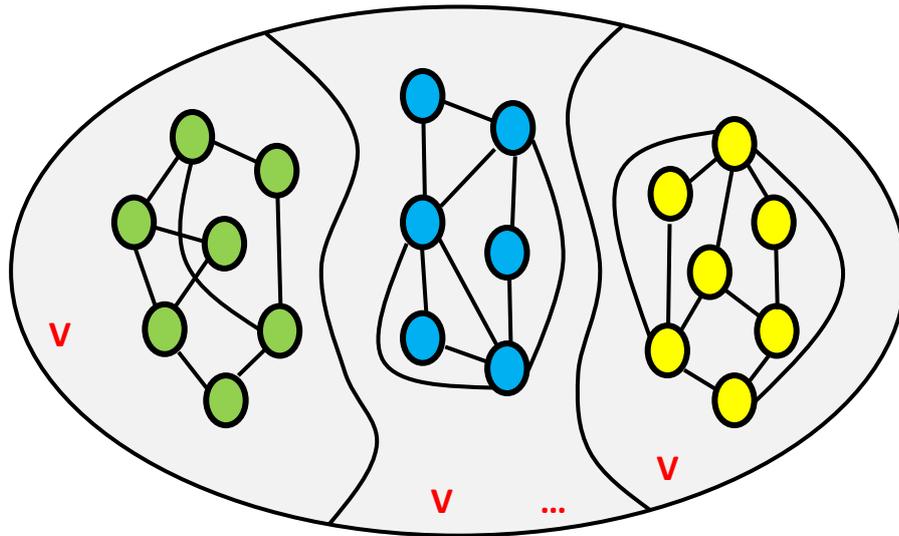
$\leftrightarrow$  existe un camino de  $u - w$  de  $G$

$\leftrightarrow u \equiv w$

En consecuencia:

Si establecemos una partición en el conjunto  $V$  de vértices, es decir:  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_K$ ; entonces los vértices que están en una misma clase son mutuamente accesibles por algún camino; asimismo vértices de clases diferentes no son accesibles.

De la misma manera podemos establecer, una partición sobre el conjunto  $E$  de aristas, es decir:  $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_K$ . obteniendo de esta manera el siguiente grafo:



**Observación:**

- ✓ Cada componente conexa del grafo  $G = (V, E)$  es un subgrafo  $G_i = (V_i)$  generado por cada una de las clases de equivalencia  $V_i$ ; dicho grafo se puede expresar como unión de componentes conexas, es decir:  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_K$
- ✓ Cada una de las componentes conexas de un grafo  $G = (V, E)$  es un grafo conexo.
- ✓ Un grafo  $G = (V, E)$  es conexo cuando y solo cuando tiene una única componente conexa.

**2.3.27. Definición**

Si el grafo  $G = (V, E)$  es de orden  $n$  y longitud  $m$ , con  $k$  componentes conexas, cuyos órdenes y longitudes son respectivamente  $n_i, m_i (i = 1, \dots, k)$ , entonces:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i, \quad m = \sum_{i=1}^k m_i$$

### 2.3.28. Proposición

Si un grafo  $G = (V, E)$  es conexo de orden  $n$  y longitud  $m$ , entonces se cumple la siguiente relación,  $m \geq n - 1$

#### Demostración

Por inducción tenemos:

#### PASO 1:

Para  $n = 1$  el resultado es inmediato, ya que:  $m \geq 1 - 1 = 0$ .

#### PASO 2: (HIPOTESIS INDUCTIVA)

Para  $n = k$ , suponemos que la propiedad es cierta es decir para todo grafo conexo de orden  $n - 1 \geq 1$  y se prueba que también lo es para todo grafo conexo de orden  $n$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo de orden  $n$  y longitud  $m$ . Se debe probar que  $m \geq n - 1$ .

1. Si todos los vértices de  $G$  tienen grado mayor o igual que 2, entonces se aplica la fórmula de los grados, es decir:

$$2m = \sum_{v \in V} g(v) \geq 2n \text{ y por lo tanto } m \geq n > n - 1.$$

#### PASO 3: (TESIS INDUCTIVA)

Supongamos que el grafo  $G$  tiene  $nv$  vértices de grado 1, entonces  $G' = G - v$  es un grafo conexo de orden  $n - 1$  y longitud  $m - 1$ . Luego aplicando la hipótesis inductiva para  $G'$  se tiene que  $m - 1 \geq n - 2$ , en consecuencia resulta que  $m \geq n - 1$ .

### 2.3.29. Proposición

Si  $G = (V, E)$  es un grafo de orden  $n$ , longitud  $m$  y  $k$  componentes conexas, entonces,

$$m \geq n - k$$

**Observación:**

Si en un grafo conexo se elimina uno de sus vértices, el número de componentes conexas que resultan no puede exceder el grado del vértice eliminado.

**2.4. Formulación de la Hipótesis****2.4.1. Hipótesis General**

Algunas estructuras algebraicas son representadas a través de la teoría de grafos.

**2.4.2. Hipótesis Especificas**

Algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo son representadas a través de la teoría de grafos.

Algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial son representadas a través de la teoría de grafos.

## **CAPÍTULO III**

### **METODOLOGÍA**

#### **3.1. Diseño Metodológico**

##### **3.1.1. Tipo De Investigación**

Dada la característica de la investigación fue de tipo descriptivo, considerando a la vez los siguientes métodos:

##### **Método Deductivo:**

Porque permite demostrar ejemplos como casos especiales relacionados a los resultados obtenidos.

##### **Método Hipotético-Deductivo:**

Porque analiza representaciones gráficas y las caracterizaciones basadas en estructuras discretas, a partir de las hipótesis formuladas y los procedimientos deductivos desarrollados.

##### **3.1.2. Nivel de Investigación**

Por la naturaleza y características del estudio el nivel de investigación es exploratorio.

##### **3.1.3. Diseño**

Por ser una investigación de carácter teórico, el diseño es básicamente explicativo basado en el análisis crítico de sus teoremas y propiedades, en la la discusión de los mismos.

#### **3.1.4. Enfoque**

Dada la naturaleza del diseño de la investigación, ésta es de enfoque cualitativo.

### **3.2. Población y Muestra**

#### **3.2.1. Población**

En la investigación se considera como población a todas las estructuras estudiadas en la asignatura de matemática discreta.

#### **3.2.2. Muestra**

Se considera como muestra a la estructura discreta de la teoría de grafos, su caracterización y diferentes propiedades.

### **3.3. Operacionalización de las Variables e Indicadores**

Con la finalidad de realizar la operacionalización de variables, en la investigación se propone acciones tales como:

#### **Primero:**

Estudio de la caracterización de algunas de las estructuras algebraicas.

#### **Segundo:**

Demostración de algunos teoremas y propiedades de las estructuras algebraicas.

#### **Tercero:**

Determinación de la caracterización de las estructuras discretas, en especial la teoría de grafos.

#### **Cuarto:**

Representación de las estructuras algebraicas haciendo uso de la teoría de grafos determinando la relación entre cada una de las estructuras.

### 3.4. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

TECNICA	INSTRUMENTO
<b>Análisis Documental:</b> se realizó una búsqueda de información registradas en otras investigaciones ya sea de forma impresa, electrónica, de libros, papers, etc.	Fichas textuales y de resumen.
<b>Método Deductivo:</b> Se llega a una conclusión a partir de premisas planteadas.	Demostración.

### 3.5. Técnicas para el proceso de la Información

A partir de la información obtenida se procedió a: analizar, interpretar y utilizar teoremas, proposiciones y propiedades que permitan llegar a resultados favorables que permitan dar respuesta al problema planteado.

### 3.6. Materiales y equipos

- Material de escritorio
- Libros

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

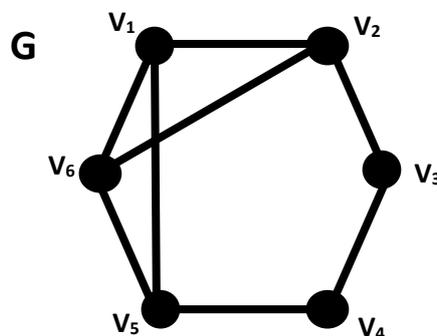
#### 4.1. Matriz de Adyacencia.

Sea  $G = (V, E)$  un grafo de  $n$  vértices, donde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Una matriz de adyacencia se define como  $A_{n \times n} = (a_{ij})$  donde  $a_{ij}$  es la cantidad de aristas incidentes a partir de  $v_i$  a  $v_j$ .

#### 4.2. Proposición:

- ✓ En un grafo no dirigido  $G = (V, E)$ , toda matriz de adyacencia es simétrica, es decir se comprueba que  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ . El cual se verifica dado que si  $v_i$  es vértice adyacente a  $v_j$ , esto implica que  $v_j$  es vértice adyacente a  $v_i$ .

**Ejemplo:** Consideremos el siguiente grafo:



La correspondiente matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

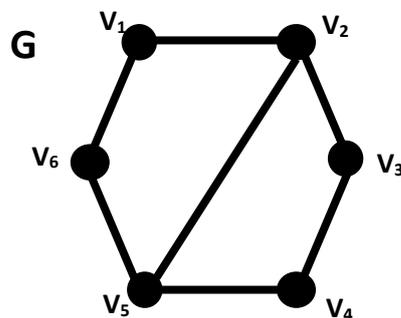
Observamos que dicha matriz es simétrica con respecto a su diagonal.

- ✓ El conjunto de grafos con  $n$  vértices debidamente etiquetados tiene una correspondencia biunívoca con el conjunto de las matrices binarias simétricas de orden  $n \times n$  con elementos ceros en las diagonales.

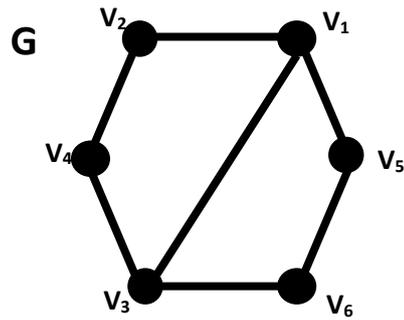
**Ejemplo.** - Si consideremos la siguiente matriz de adyacencia:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces el correspondiente grafo es:



Supongamos que este mismo grafo se etiqueta de otra manera, por ejemplo, mostramos el siguiente:



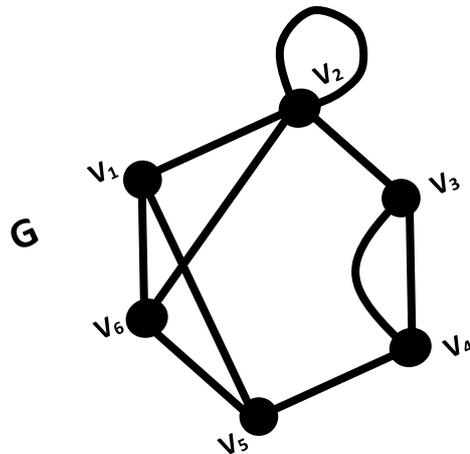
Entonces su correspondiente matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que se ratifica la existencia de una correspondencia biunívoca entre los grafo y el conjunto de matrices de adyacencia simétrica.

- ✓ La matriz adyacente que corresponde a un multigrafo no es una matriz binaria.

**Ejemplo:** Consideremos el siguiente multigrafo:



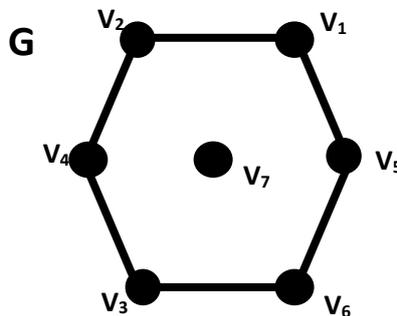
Su correspondiente matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que no es una matriz binaria

- ✓ Si en el grafo  $G = (V, E)$  existe  $v_i$  un vértice aislado, entonces tanto la  $i$ -ésima fila como la  $i$ -ésima columna de la matriz  $A$  están formados por ceros.

**Ejemplo:** Consideremos el siguiente grafo:



Entonces su correspondiente matriz de adyacencia es:

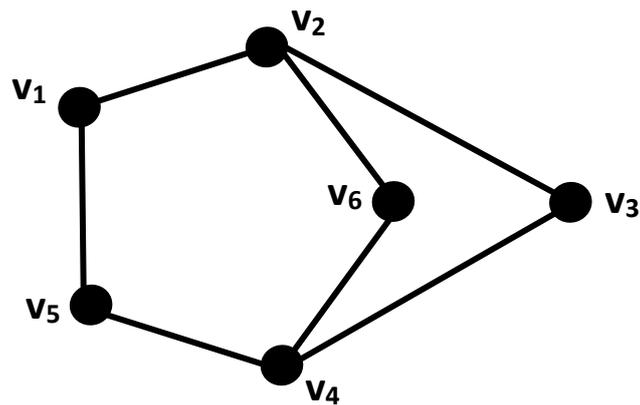
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa claramente que la fila y columna 7 correspondiente al vértice  $v_7$  es cero:

- ✓ Dado el grafo  $G = (V, E)$  no dirigido, entonces la suma de los correspondientes elementos de la  $i$ -ésima fila ( $i$ -ésima columna) de una matriz de adyacencia concuerda con el grado del vértice  $v_i$ .

$$\delta(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ji}$$

**Ejemplo.** – Sea el siguiente grafo



Y su matriz de adyacencia:

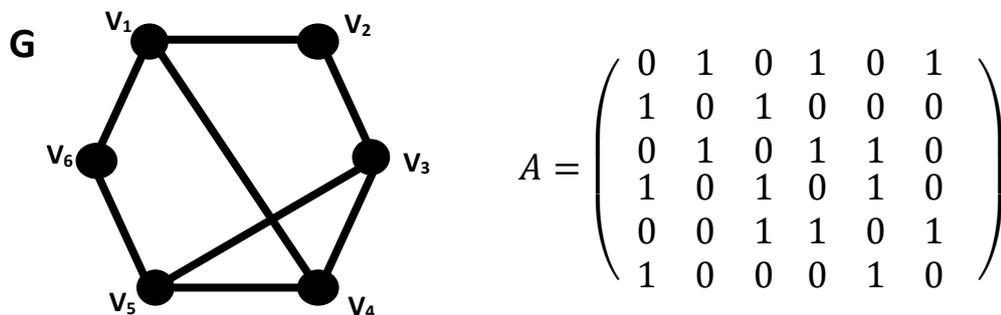
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los elementos de la cuarta fila de la matriz  $A$  suman a 3, el mismo que es igual al grado del vértice  $v_4$ .

De la misma manera si sumamos los elementos de la columna seis en la matriz A observamos que es igual a 2, caso que es igual al grado de  $v_6$ . Lo que ratifica dicha propiedad.

- ✓ En un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  sin lazos, la matriz de adyacencia cumple la propiedad: el doble del número de aristas del grafo es igual a la suma de los elementos que componen la matriz. Asimismo, se observa que, en grafos dirigidos, se tiene que la suma de todas las componentes de la matriz de adyacencia es igual al tamaño del grafo.

**Ejemplo:**



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Suma de todos las componentes de la matriz} = 16$$

$$\text{Numero de aristas del grafo} = 8$$

Luego:

$$\text{Suma de elementos} = 2 * \text{Numero de aristas}$$

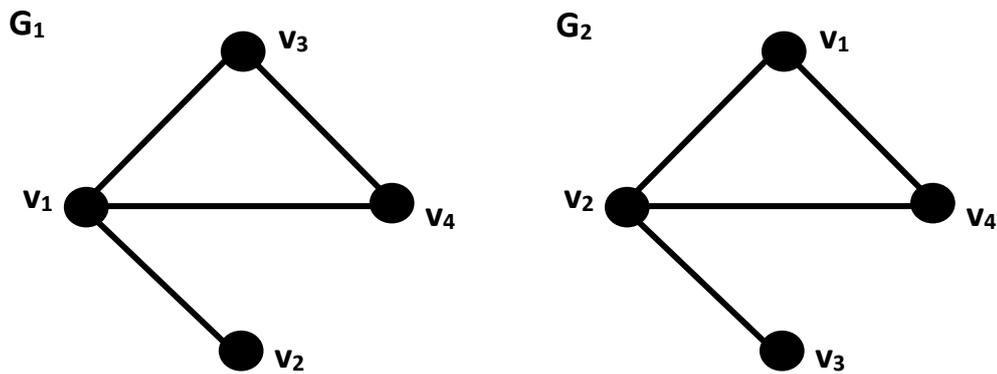
$$16 = 2 ( 8 )$$

### 4.3. Proposición:

Si  $A_1$  y  $A_2$  son matrices adyacentes que representan a un mismo grafo  $G = (V, E)$ , con diferentes etiquetas, entonces existe una matriz  $P$  llamada matriz de paso o matriz permutación la cual es una matriz regular que se cumple:

$$A_2 = PA_1P^T$$

Consideremos el siguiente grafo con diferentes etiquetados:



Consideremos la matriz  $A_1$  de adyacencia para el grafo  $G_1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Así mismo la matriz de permutación  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En donde  $P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicando la proposición tenemos:

$$A_2 = PA_1P^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El cual la matriz  $A_2$  es exactamente la matriz de adyacencia para el grafo  $G_2$

#### 4.4. Caracterización de grafos conexos:

Sean: “A” una matriz de adyacencia que representa al grafo  $G = (V, E)$  con  $n$ -vértices, y  $B = (b_{ij})$  una matriz definida por:  $B = A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ . Entonces se concluye que  $G$  es conexo si y solo si  $b_{ij} \neq 0$ , con  $i \neq j$ , es decir, los elementos que no pertenecen a la diagonal de la matriz  $B$  son no nulos.

#### Demostración:

Denotemos por  $a_{ij}^{(k)}$  al elemento  $(i, j)$  de la matriz  $A^k$ , donde  $k = 1, \dots, (n - 1)$ .

Entonces:

$$b_{ij} = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + \dots + a_{ij}^{(n-1)}$$

Como los elementos  $a_{ij}^{(k)}$  representan los posibles caminos de longitud  $K$  existentes entre  $v_i$  y  $v_j$ . Se deduce que  $b_{ij}$  representa la cantidad de caminos distintos de  $v_i$  a  $v_j$  de longitud menor a “ $n$ ”.

$\Rightarrow$  )

Demostraremos que si  $G$  es conexo, entonces  $b_{ij} \neq 0$ , con  $i \neq j$ .

#### En efecto:

Supongamos que  $G = (V, E)$  es un grafo conexo, entonces cualquier par de vértices existe un camino que los unen. Además como el grafo  $G = (V, E)$  tiene  $n$  vértices, dicho camino pasará a lo más por los  $n$ -vértices y su longitud será menor que  $n$ .

Dado que este resultado es para cualquier par de vértices, entonces se tiene que  $b_{ij} \neq 0$  con  $i \neq j$ .

**Recíprocamente:**

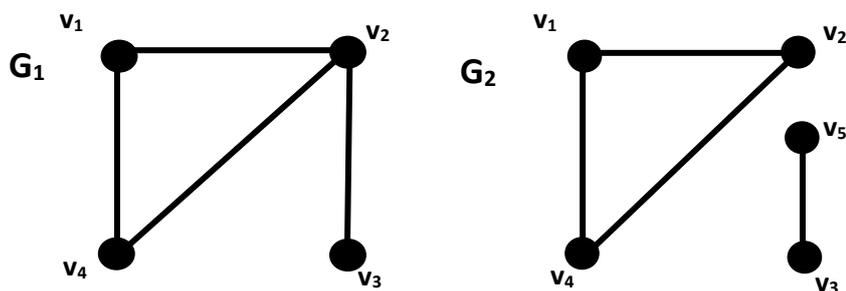
$\Leftrightarrow$  )

Mostraremos que si  $b_{ij} \neq 0$ , con  $i \neq j$ , entonces el grafo  $G = (V, E)$  es conexo.

**En efecto:**

Supongamos que  $b_{ij} \neq 0$  con  $i \neq j$ , entonces existe por lo menos un camino de longitud menor que “n” desde el vértice  $v_i$  al vértice  $v_j$ . Esto significa que para todo par  $(i, j)$  con  $i \neq j$ , los vértices  $v_i$  y  $v_j$  se encuentran en una misma componente conexa. En consecuencia el grafo  $G = (V, E)$  es conexo.

**Ejemplo.** - Demuestre si los siguientes grafos son conexos o desconexos mediante la caracterización de grafos:



**Solución.** - Consideremos la matriz de adyacencia del grafo  $G_1$ .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y realicemos las operaciones para } A_1^2 \text{ y } A_1^3, \text{ con el}$$

producto usual de matrices:

$$\text{Es decir } A_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A_1^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$B_1 = A_1 + A_1^2 + A_1^3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como en la matriz  $B_1$  todos los elementos que no pertenecen a la diagonal son diferentes de cero, entonces se concluye que el grafo  $G_1$  es conexo.

Análogamente analizamos para el grafo  $G_2$

$$\text{Sea } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ la matriz de adyacencia, entonces realizando las}$$

operaciones para  $A_2^2$ ,  $A_2^3$  y  $A_2^4$ , tenemos::

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces } B_2 = A_2 + A_2^2 + A_2^3 + A_2^4 = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 10 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como la matriz  $B_2$  tiene ceros en los elementos extradiagonales, se concluye que el grafo  $G_2$  es un grafo no conexo.

#### 4.5. Proposición.

Si un grafo  $G = (V, E)$  tiene dos componentes conexas, entonces el grafo  $G = (V, E)$  es etiquetado sus vértices de manera que la matriz de adyacencia  $A$  es de la forma

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & \theta \\ \hline \theta & A_2 \end{array} \right)$$

Donde  $A_1$  y  $A_2$  son matrices de adyacencia de cada una de las componentes conexas del grafo  $G = (V, E)$ .

#### Observación:

Franco, F. (2016) en su tesis Aspectos Algebraicos en la teoría de grafos menciona:

- ✓ Un grafo  $G = (V, E)$  tiene  $k$ -componentes conexas  $G_1, \dots, G_k$  si y solo si, existe una matriz de permutaciones  $P$  tal que:

$$PA(G)P^T = \begin{pmatrix} A(G_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(G_2) & \dots & \\ & \vdots & & \\ 0 & & \dots & A(G_k) \end{pmatrix}$$

Esta propiedad es una generalización a las proposiciones anteriormente mencionadas en donde para cada componente conexa existe su matriz de adyacencia.

- ✓ Si el grafo  $G = (V, E)$  es no conexo con más de dos componentes conexas, entonces existe una forma de etiquetar en sus vértices tal manera que la matriz de adyacencia es diagonal por bloques.

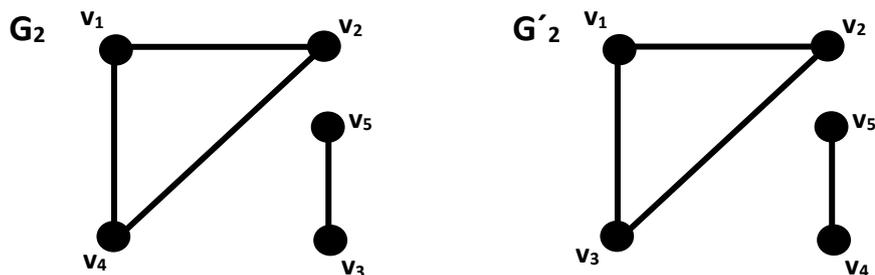
Esta propiedad nos conduce a grafos conexos:

- ✓ Un grafo  $G = (V, E)$  es conexo si y solo si su matriz de adyacencia no es semejante a una matriz diagonal por bloques.

**Ejemplo.-** Consideremos el grafo no conexo  $G_2$  anteriormente planteado, entonces por la proposición 4.5, existe una reordenamiento de sus vértices que transforma a la matriz de adyacencia en una matriz diagonal por bloques.

**En efecto:**

Intercambiamos las etiquetas de los vértices  $v_3$  y  $v_4$ , el cual los vértices  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es una componente conexa y los vértices  $\{v_4, v_5\}$  es la otra componente conexa. Por lo que la matriz de adyacencia es  $A'_2$ , el cual se obtiene intercambiando las filas y columnas 3 y 4 de dicha matriz  $A_2$ . Teniendo como resultado lo siguiente:



$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A'_2 = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Reordenamiento de vértices en grafos no conexos

En la matriz  $A'_2$  podemos observar que cada bloque de la diagonal de la matriz, es matriz de adyacencia de cada una de las componentes conexas del grafo  $G'_2$ .

#### 4.6. Matriz de Incidencia:

Sea el grafo  $G = (V, E)$  de  $n$ -vértices y  $m$ -aristas, debidamente etiquetado con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . La matriz de incidencia de  $G = (V, E)$  se define por  $M_{n \times m} = (m_{ij})$ , donde:

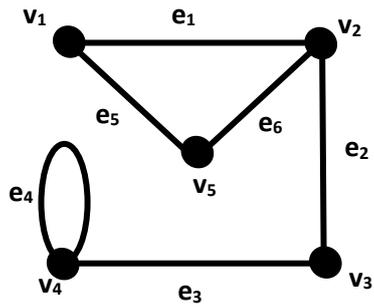
$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } e_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es incidente con } e_j \\ 2 & \text{si la arista } e_j \text{ es un lazo en el vertice } v_i \end{cases}$$

Si  $G = (V, E)$  es un grafo no dirigido.

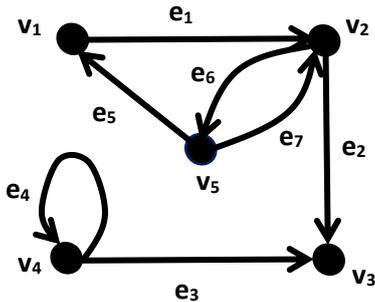
$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } v_i \text{ no es incidente con } e_j \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es el comienzo de la arista dirigida con } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es el final de la arista dirigida con } e_j \\ 2 & \text{si } e_j \text{ es un lazo en el vertice } v_i \end{cases}$$

Si  $G = (V, E)$  es un grafo dirigido,

**Ejemplo.** - Las siguientes figuras son dos grafos en donde se muestra sus correspondientes matrices de incidencia.



$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**4.7. Proposición:**

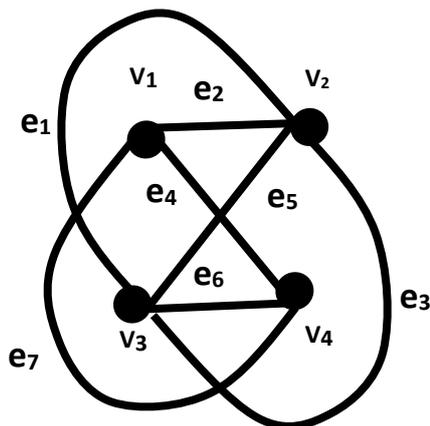
De los resultados anteriormente establecidos y a lo mencionado por Franco, F. (2016) tenemos:

1. Las matrices de incidencia y de adyacencia dependen de la forma de etiquetar el grafo.

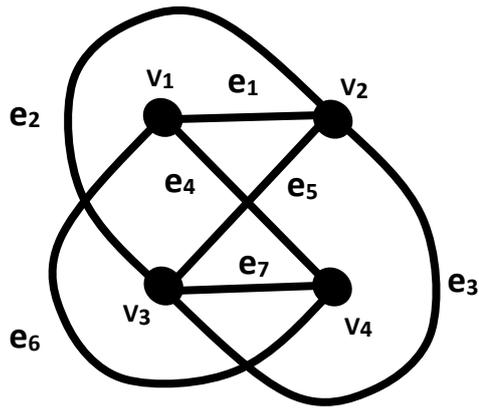
**En efecto:**

Sean las matrices de incidencia:  $M_1$  y  $M_2$  para dos diferentes formas de etiquetado en un grafo  $G = (V, E)$ , entonces mediante el intercambio de filas y columnas podemos trasladarnos de la matriz  $M_1$  a la matriz  $M_2$ .

**Ejemplo:** En el siguiente grafo se considera dos formas de etiquetado y sus respectivas matrices de incidencia:



$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego concluimos que la matriz de incidencia  $M_1$  es transformada en  $M_2$  cambiando las columnas 1 y 2 luego las columnas 6 y 7.

2. La suma de los elementos de la  $i$ -ésima fila de la matriz de incidencia  $M$  en un grafo no dirigido  $G = (V, E)$  da como resultado el grado del vértice  $v_i$  de  $G = (V, E)$ , mientras que la suma de los elementos de cualquier columna es igual a dos.

**Ejemplo:** si consideramos la matriz de incidencia del grafo no dirigido dado anteriormente, tenemos que de cualquier columna sus elementos suman 2, además la suma de los elementos de cada fila es igual al grado del vértice:

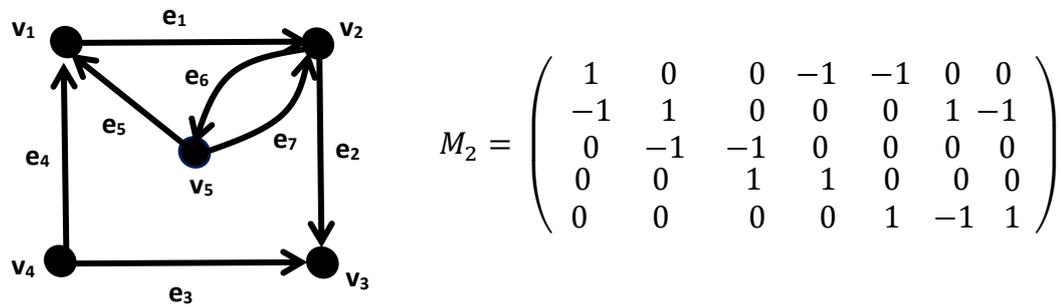
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\searrow$   
 Suma = 3 = Grado de  $v_1$

$\swarrow$   
 Suma = 2

3. En todo grafo dirigido sin lazos se tiene que, la suma de los elementos de cualquier  $i$ -ésima fila de la matriz de incidencia  $M$  es igual a la diferencia entre el grado de salida y el grado de entrada del vértice  $v_i$ , además la suma de todos los elementos de cualquier columna es cero.

**Ejemplo:** Considerando el siguiente grafo



Si tenemos la fila 2, que corresponde al vértice  $v_2$  observamos que la suma de sus elementos es 0 el mismo que es igual a la diferencia del grado de salida y el grado de entrada.

**4.8. Proposición:**

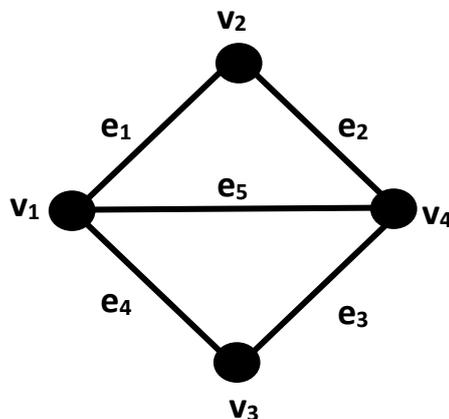
Sea  $G = (V, E)$  un grafo cuyas matrices de adyacencia e incidencia son  $A$  y  $M$  respectivamente, además sea  $D$  una matriz diagonal con elementos de su diagonal determinados por los grados de los correspondientes vértices, entonces:

$$A + D = M \cdot M^t$$

**Observación:**

Las operaciones de suma y multiplicación de matrices es la usual.

**Ejemplo.** - Consideremos el siguiente grafo etiquetado:



Considerando la matriz de adyacencia  $A$ , la diagonal  $D$  y la de incidencia  $M$ , tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces por la proposición, tenemos:

$$A + D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lo que se ratifica la relación:

$$A + D = M \cdot M^t$$

#### 4.9. Matriz de Alcance:

Sea el grafo etiquetado  $G = (V, E)$  de  $n$  vértices, una matriz de alcance denotado por

$R_{n \times n}$  se define como:

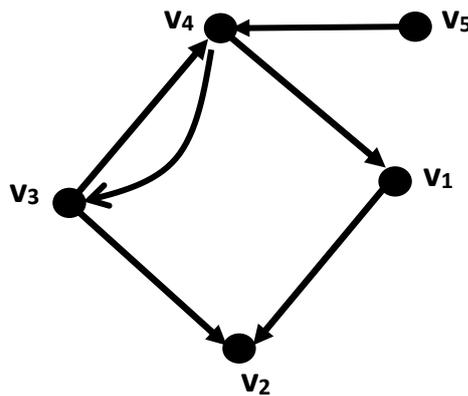
$$R_{n \times n} = (r_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{Si existe un camino de } v_i \text{ a } v_j \\ 0 & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

#### 4.10. Matriz de Distancias:

Una matriz de distancias en un grafo  $G = (V, E)$  de  $n$  vértices etiquetado, se define como:

$$C_{n \times n} = (c_{ij}) = \begin{cases} c_{ij} & \text{distancia que existe de } v_i \text{ a } v_j \\ \infty & \text{Si no existe un camino de } v_i \text{ a } v_j \end{cases}$$

**Ejemplo.** - Hallar la matriz de alcance y la matriz de distancias del siguiente grafo:



Considerando las definiciones de las matrices obtenemos lo siguiente:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \infty \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \infty \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de alcance

Matriz de distancia

#### 4.11. Polinomio Característico:

Sean: el grafo  $G = (V, E)$  de  $n$ -vértices (sin lazos ni aristas múltiples) y  $A$  una matriz de adyacencia. El polinomio característico de  $G = (V, E)$  se define como:

$$PG(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

**Observación:**

El polinomio característico de un grafo  $G = (V, E)$  es único.

**4.12. Proposición:**

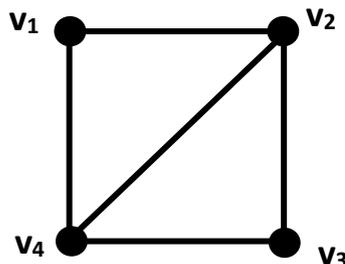
El polinomio característico de un grafo  $G = (V, E)$  no depende de la forma de etiquetar los vértices.

**Demostración:**

Sean  $A_1$  y  $A_2$  matrices de adyacencia del grafo  $G = (V, E)$  el cual corresponde a dos etiquetados diferentes, además denotemos a los polinomios característicos por  $P_G^1(\lambda)$  y  $P_G^2(\lambda)$  de  $G$  correspondiente a dichas matrices de adyacencia. Entonces existe una matriz de permutación invertible  $P$  en la cual se cumple  $A_1 = P^{-1}A_2P$ , es decir:

$$\begin{aligned} P_G^1(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}A_2P - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}(A_2 - \lambda I)P) = \det(P^{-1}(A_2 - \lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A_2 - \lambda I) \det(P) \\ &= \det(A_2 - \lambda I) = P_G^2(\lambda) \end{aligned}$$

**Ejemplo.-** Consideremos el siguiente grafo y hallemos su correspondiente polinomio característico, determinando primero su matriz de adyacencia asociada, es decir:



La correspondiente matriz de adyacencia es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico de  $G$ , tomamos el determinante de la matriz de adyacencia, es decir:

$$PG(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$$

Por lo tanto:

$$PG(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$$

#### 4.13. Auto valor de un Grafo:

El número  $\lambda$  es un autovalor de un grafo  $G = (V, E)$  si este es raíz de algún polinomio característico  $PG(\lambda)$ .

**Ejemplo.** – Determine los autovalores del grafo considerado anteriormente:

**Solución:**

Puesto que el polinomio característico es:

$$PG(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$$

Factorizando tenemos:

$$PG(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 4)$$

Luego, igualando a cero cada uno de estos factores, tenemos:

- ✓  $\lambda_1 = 0$
- ✓  $\lambda_2 = -1$
- ✓  $\lambda_3 \approx 2,56155$
- ✓  $\lambda_4 \approx -1,56155$

Son las raíces del polinomio que son exactamente los autovalores.

#### 4.14. Espectro de un Grafo:

Sea el grafo  $G = (V, E)$  con  $s$ -autovalores diferentes talque  $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$  cuyas multiplicidades son respectivamente  $m(\lambda_1), \dots, \dots, m(\lambda_s)$ . Definimos el espectro de  $G$  como:

$$\text{spec}(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_s \\ m(\lambda_1) & \dots & \dots & m(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

Como ejemplo tenemos el espectro del grafo considerado anteriormente:

$$\text{spec}(G) = \begin{pmatrix} 2,56155 & 0 & -1 & -1,56155 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Observación. -

Siempre consideramos los autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \dots, \lambda_s$  ordenados de manera estrictamente decreciente.

En caso de que  $G = (V, E)$ , no sea un grafo conexo, un polinomio característico puede obtenerse de la manera como se muestra en la siguiente proposición.

**4.15. Proposición:**

Si  $G = (V, E)$  es un grafo con dos componentes conexas,  $G_1$  y  $G_2$  entonces se cumple la siguiente relación:

$$PG(\lambda) = PG_1(\lambda) \cdot PG_2(\lambda)$$

De manera particular:

Si  $G_1, \dots, G_r$  son componentes conexas del grafo  $G = (V, E)$  entonces:

$$PG(\lambda) = PG_1(\lambda) \dots PG_r(\lambda).$$

**Demostración:**

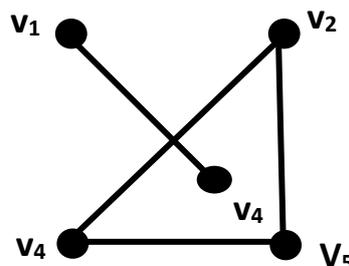
Consideremos  $A_i$  como la matriz de adyacencia de la componente conexa  $G_i$  con  $i = 1, 2$ . Entonces en base a proposición anterior el grafo admite una forma de etiquetar tal que su matriz de adyacencia tiene la forma:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & \theta \\ \hline \theta & A_2 \end{array} \right)$$

Luego:

$$PG(\lambda) = PG_1(\lambda) \cdot PG_2(\lambda)$$

**Ejemplo:** Consideremos el siguiente grafo no conexo con dos componentes conexas:



Entonces sus correspondientes matrices de adyacencia de las componentes conexas son:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Además los polinomios característicos son:

$$PG_1(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

$$PG_2(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

Ahora consideremos la matriz de adyacencia del grafo  $G = (V, E)$  cuya forma es:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_1 & \theta \\ \hline \theta & A_2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

El polinomio característico es:

$$\begin{aligned} PG(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda^2 - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Finalmente se comprueba que:  $PG(\lambda) = PG_1(\lambda) \cdot PG_2(\lambda)$

En base a los resultados obtenidos por Franco, F. (2016) tenemos la siguiente proposición:

#### 4.16. Proposición:

Sea el grafo  $G = (E, V)$  de n-vértices y m-aristas, con su respectivo polinomio característico:

$$PG(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

Entonces podemos concluir que los coeficientes de  $PG(\lambda)$  satisfacen lo siguiente :

1.  $a_1 = 0$
2.  $-a_2 = m$
3.  $-a_3 = 2t$ , siendo t en número de triángulos de G.

**Demostración:**

Si  $PG(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$  es un polinomio característico de la matriz A, entonces

$$a_1 = (-1)^i \sum M_i A,$$

Donde  $M_i(A)$  representa al menor principal de la matriz de orden i.

1. Debido que la matriz A tiene en su diagonal principal todos ceros, entonces los menores principales de orden 1 todos valen 0 por lo que se deduce que  $a_1 = 0$ .
2. Cualquier menor principal de orden 2 de la matriz A con entradas no nulas es obligatoriamente de la forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Observamos que el menor principal aparece en la matriz A en cada par de vértices adyacentes del grafo  $G = (V, E)$  y tiene valor igual a -1.

Por tanto:  $(-1)^2 a_2 = (-1)m.$

Finalmente se obtiene:  $-a_2 = m$

3. Para los menores principales de orden 3 de la matriz A, son ocho posibilidades:

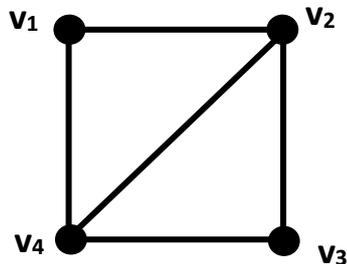
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

De todos los determinantes, se observa que el único diferente de la matriz nula es el primero, cuyo valor es igual a 2, el cual corresponde a tres vértices de  $G = (V, E)$  mutuamente adyacentes, luego se observa que es un triángulo, es decir  $(-1)^3 a_3 = 2t$ .

Finalmente se concluye que,  $-a_3 = 2t$ .

**Ejemplo:** consideremos el siguiente gráfico:



El correspondiente polinomio característico es:

$$PG(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$$

Comparando con el polinomio característico de cuarto orden:

$$PG(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4$$

Observamos lo siguiente:

$$a_1 = 0$$

–  $a_2 = 5 = m = \text{Numero de aristas}$

–  $a_3 = 4 = 2(2)$  *donde 2 = Numero de triangulos de G.*

## **CAPITULO V**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

#### **Conclusiones:**

- ✓ Con la teoría de grafos y sus diferentes caracterizaciones se pueden representar estructuras algebraicas.
- ✓ Es posible representar algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo mediante la teoría de grafos.
- ✓ Algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial son posibles representar mediante la teoría de grafos.
- ✓ La teoría de grafos son representaciones que permiten de manera visual ser más sencillas y las diferentes propiedades que intervienen en ellas facilitan de manera practica la resolución de problemas.

#### **Recomendaciones:**

- ✓ Realizar investigaciones relacionadas a la teoría de grafos y establecer vínculos con otras áreas de la matemática.

## CAPITULO VI

### FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

- Bastidas, P. (2004). *Estrategias y técnicas Didácticas*. Quito, Ecuador: S&A.
- Capcha, R. (2015). *La teoría de grafos en la resolución de problemas aritmeticos para estudiantes del laboratorio de investigación e innovación pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco 2014*. Cerro de Pasco Perú.
- Dunham, W. (1995). *El universo de las matematicas* . Madrid: Piramide.
- Dragos, P. (2008). *Eingenspaces of graphs (Vol. 66)*. New York: Cambridge University Prees.
- Franco, F. (2016). *Aspectos algebraicos en teoría de grafos*. Sevilla España: Universidad de Sevilla.
- Hernandez, C. (2006). *Metodologia de la Investigacion* . Mexico : McGraw - Hill.
- Iciar, A. (2017). *Introducción a la Teoría Algebraica de Grafos*. España: Universidad de la Laguna.
- Patiño, B. (2013). *Enseñanza de la teoría de grafos como estrategia para desarrollar procesos de matemátización*. Bogotá Colombia: Universidad Sergio Arboleda.
- Piedra, V. & Paternostro, C. (2009). *Aplicaciones de la Teoría de Grafos a la Informática*. Pontificia Universidad Javeriana, Facultad de Ciencias, Bogotá.
- Quispe, M. (2019). *Sistema deductivo basado en grafos para la logica intuicionista*. Arequipa: Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.

## **ANEXOS**

## Matriz de Consistencia

### TITULO: Representación de Estructuras Algebraicas basadas en la Teoría de Grafos

PROBLEMA	OBJETIVO	HIPOTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
<p style="text-align: center;"><b><u>PROBLEMA GENERAL</u></b></p> <p>¿Es posible representar algunas estructuras algebraicas a través de la teoría de grafos?</p>	<p style="text-align: center;"><b><u>OBJETIVO GENERAL</u></b></p> <p>Establecer una representación de algunas estructuras algebraicas a través de la teoría de grafos.</p>	<p style="text-align: center;"><b><u>HIPOTESIS GENERAL</u></b></p> <p>Algunas estructuras algebraicas son representadas a través de la teoría de grafos.</p>	<p>ESTRUCTURA DISCRETA DE GRAFO.</p>	<p><b>Universo:</b> Estructuras Discretas.</p> <p><b>Muestra:</b> Estructura discreta de grafos y su caracterización</p> <p><b>Método:</b> Deductivo</p> <p><b>Técnicas para el acopio de datos:</b> Análisis documental: libros, papers, investigaciones electrónicas, impresas, etc.</p>
<p style="text-align: center;"><b><u>PROBLEMAS ESPECÍFICOS</u></b></p> <p>¿Es posible representar algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo a través de la teoría de grafos?</p>	<p style="text-align: center;"><b><u>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</u></b></p> <p>Determinar una representación de las caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo a través de la teoría de grafos.</p>	<p style="text-align: center;"><b><u>HIPOTESIS ESPECÍFICAS</u></b></p> <p>Algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de grupo son representadas a través de la teoría de grafos.</p>	<p>CARACTERIZACION DE ALGUNAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS DE GRUPO Y ESPACIO VECTORIAL.</p>	<p><b>Instrumentos:</b></p> <p><b>De recolección de datos:</b> Fichas textuales y de resumen.</p> <p><b>Para el Procesamiento de datos:</b> Teoremas, proposiciones propiedades.</p> <p><b>Técnicas para el análisis e interpretación de datos:</b> Demostraciones, representaciones</p> <p><b>Tipo de Investigación:</b> Básica</p> <p><b>Diseño de Investigación</b> Explicativo basado en la discusión y análisis.</p>
<p>¿Es posible representar caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial a través de la teoría de grafos?</p>	<p>Determinar una representación de las caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial a través de la teoría de grafos.</p>	<p>Algunas caracterizaciones de la estructura algebraica de espacio vectorial son representadas a través de la teoría de grafos.</p>		