UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

TESIS:

“INTERPRETACIÓN CATEGÓRICA PARA EL CÁLCULO DE SECUENTES DE LA LÓGICA INTUICIONISTA”

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA APLICADA

PRESENTADO POR:

AIRA CEFERINO FÉLIX DANIEL

ASESOR:

Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

Huacho - Perú

2021

INTERPRETACIÓN CATEGÓRICA PARA EL CÁLCULO DE SECUENTES DE LA LÓGICA INTUICIONISTA

TESIS DE PREGRADO

ASESOR: Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

Juan Carlos Broncano T.
Mo Mat. Aplicada No
Colegiatura 1449 COPEMAT

UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SANCHEZ CARRIÓN

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

Juan Carlos Broncano T.
Mo Mat. Aplicada No
Colegiatura 1449 COPEMAT

Mo. JUAN CARLOS BRONCANO TORRES

ASESOR

RIOS PEREZ ISIDRO
LIC. EN MATEMÁTICAS

Mo. ISIDRO JAVIER RIOS PEREZ

PRESIDENTE

Hector Alexis Herrera Vega
Lic. en Matemática Aplicada

Mo. HECTOR ALEXIS HERRERA VEGA

SECRETARIO

M(o). Cristian Milton Mendoza Flores
Licenciado en Física

Mo. CRISTIAN MILTON MENDOZA FLORES

VOCAL

DEDICATORIA

A todos quienes han sido la base de mi formación por haber aportado pequeños consejos que han ocasionado grandes hechos en mi vida.

AIRA CEFERINO, Félix Daniel

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en primer lugar a Dios porque nos dio el don de la perseverancia para alcanzar nuestras metas; en segundo lugar, a mi compañera de toda la vida ROSA FAUSTINA J.P por toda su ayuda, ha sido sumamente importante su presencia a mi lado incluso en momentos y situaciones muy tormentosas siempre con su inmenso amor incondicional, brindándome su apoyo en el transcurso de esta aventura que ha sido elaborar mis tesis tan necesarias para poder cristalizar mi sueño.

AIRA CEFERINO, Félix Daniel

ÍNDICE

RESUMEN

La presente tesis titulada “INTEPRETACION CATEGORICA PARA EL CALCULO DE SECUENTES DE LA LOGICA INTUICIONISTA” se ha desarrollado para optar el título de Licenciado en Matemática Aplicada.

Objetivo: La investigación tuvo como objetivo interpretar el cálculo de secuente de la Lógica Intuicionista con ayuda de la teoría de Categorías.

Metodología: La metodología que se empleo fue de tipo teórica, de alcance descriptivo; el mismo que se sustentado en teorías de libros y revistas científicas. **Resultados:** Los resultados encontrados indican que con la aplicación de la teoría de categorías se logra interpretar el cálculo de secuentes. Para lo cual, se desarrolló una interpretación algebraica de los fundamentos de la Lógica Intuicionista considerando para tal fin la interrelación entre la Lógica algebraica y la Lógica Intuicionista. **Conclusión**: Finalmente se concluyó que la gran importancia de la teoría de categorías para interpretar los secuentes y se recomienda a las autoridades de la Facultad de Ciencias revisar los planes de estudio y agregar temas de mayor profundidad además de los conocimientos básicas que se imparten.

Palabras Claves: Lógica Intuicionista, Funtores, Lógica, Secuente, Teoría de Categorías.

ABSTRACT

This thesis entitled "CATEGORICAL INTERPRETATION FOR THE CALCULATION OF SEQUENTS OF INTUITIONAL LOGIC" has been developed to qualify for the bachelor's degree in Applied Mathematics.

Objective: The research had the objective of interpreting the calculation of the sequential of the Intuitionist Logic with the help of the theory of Categories. **Methodology:** The methodology used was theoretical, with a descriptive scope, and was based on theories from books and scientific journals.

Results: The results found indicate that with the application of the theory of categories, the calculation of sequences can be interpreted. For that purpose, an algebraic interpretation of the foundations of Intuitionist Logic was developed, considering the interrelationship between algebraic and intuitionist logic.

Conclusion: Finally, it was concluded that the great importance of the theory of categories to interpret the sequences and it is recommended to the authorities of the Faculty of Sciences to revise the curricula and to add topics of greater depth in addition to the basic knowledge that is taught.

Keywords: Intuitionist Logic, Funtors, Logic, Sequence, Category Theory

INTRODUCCIÓN

Actualmente las ciencias matemáticas están cada vez más globalizadas, especialmente la Lógica tiene sus aplicaciones en informática y otras disciplinas la Lógica Matemática con sus estudios de las proposiciones, la inferencia y las demostraciones. El avance de la Lógica moderna permite estudiar la teoría de demostraciones usando el Sistema de Gentzen G. El alfabeto del cálculo G se difiere del cálculo de los predicados por la ausencia de los signos de implicación e igualdad. El concepto de fórmulas del cálculo G toma sus diferencias con el cálculo de predicados por la ausencia de las reglas de formación de fórmulas que usan el conectivo lógico llamado implicación. El cálculo G tiene sus reglas propias llamados axiomas del cálculo G

Una secuencia lógica es una sucesión de razonamientos deductivos jerárquicamente ordenados, de tal manera que estas forman una sucesión ordenada. El cálculo de Secuente es una manera de argumentación lógica, donde cada párrafo de la demostración es una tautología condicional. Este método es llamado de Gentzen.

CAPÍTULO I:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción Problemática

En el mundo de las Ciencias de la Computación el desarrollo de pruebas formales requiere de asistentes de pruebas, pues estos suelen auxiliar en su desarrollo. De manera totalmente análoga en la Lógica proposicional clásica existen sistemas que ayudan a formalizar pruebas de sentencias. Entre ellos podemos citar a la Deducción Natural y el Cálculo de Secuentes. En el sistema de Deducción Natural, las reglas de verificación son definidas, simulando el raciocinio humano a partir de las hipóstasis. Mientras tanto en el cálculo de secuentes es una manera de formalizar el uso de las reglas de inferencia conocidas y permite resolver los problemas de satisfacibilidad, validez y consecuencia lógica.

En ese sentido la lógica intuicionista, o lógica constructivista enfatiza las pruebas, en lugar de la verdad, a lo largo de las transformaciones de las proposiciones. Por lo tanto, la lógica intuicionista se aproxima al mundo matemático a partir del acto constructivo mental, pues considera que todo objeto matemático es el producto del intelecto de la mente humana. Por lo tanto, su existencia es equivalente a la posibilidad de su construcción mental.

Troelstra (1980), señala que la característica de la lógica intuicionista es considerar a la lógica clásica como parte de la matemática, y las leyes lógicas son las regularidades lingüísticas observada cuando describimos ciertas operaciones generales de las construcciones matemáticas. En ese orden de ideas Dummett (1977), considera que para construir las bases de la matemática intuicionista se debe considerar una teoría general del significado del lenguaje matemático. Por lo tanto, la relevancia, de utilizar la teoría de categorías como lenguaje para fundamentar la raíz del intuicionismo es fundamental para responder diversas relaciones entre el lenguaje y la matemática intuicionista.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.2.1 Problema General

¿Es posible interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista con ayuda de la teoría de categorías?

1.2.2 Problemas Específicos

¿De qué manera la teoría de categorías permite interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista?

¿Cómo las categorías y los funtores ayudan a interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista?

1.3 OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Objetivo General

Establecer la influencia de la teoría de categorías y los funtores en la interpretación del cálculo de secuentes se la lógica intuicionista

1.3.2 Objetivos Específicos

Determinar como la teoría de categorías es aplicable para Interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista.

Indagar cómo los funtores, los morfismos y la teoría de categorías son aplicables para interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista.

1.4 JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Esta tesis está direccionada al área de la teoría de la prueba de la lógica intuicionista, el cual estudia las construcciones y los conceptos referentes a las pruebas formales, sus diversas aplicaciones tanto en matemática, como en la filosofía y teoría de la computación hacen imprescindible su estudio.

Una alternativa ingeniosa de abordar su comprensión es aquella que se fundamenta en las estructuras algebraicas, pues procura sumergirla dentro del marco estructural con la finalidad de aprovechar los beneficios de conceptos y técnicas que ella ofrece, con esto se intenta contribuir al área de la teoría de la prueba desarrollando técnicas de satisfactibilidad de secuentes con el objetivo de mostrar que una determinada sentencia es una consecuencia lógica de un conjunto de sentencias (axiomas o hipóstasis).

De otro lado, se debe destacar la estrecha relación entre lógica intuicionista o construccionista con la Ciencia de la Computación, ya que el tratamiento lógico de los diversos algoritmos lo exige. Finalmente, como la lógica intuicionista está contenida en la lógica clásica, los argumentos categóricos propuestos servirán también para la lógica clásica.

1.5 DELIMITACIÓN DEL ESTUDIO

La lógica es uno de los campos de la reflexión filosófica más activa de este milenio, rige el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el razonamiento correcto del incorrecto. En particular la lógica intuicionista (o lógica constructivista) es de sumo interés por parte de la Matemática Aplicada, pues es usada en varios campos que van desde la implementación de lenguajes funcionales hasta la teoría de la recursión, pasando por la fundamentación de los lenguajes de programación, la teoría de la demostración, la teoría estructuralista de la matemática entre otras.

> En los trabajos de Lambek, J. (1987) se demostró que las categorías son marcos de referencia para el estudio de sistemas deductivos en los que se define una relación de equivalencia entre pruebas a lo largo de todo el proceso de transformación de las proposiciones. Es decir, se logra extender la asociación lógica-estructura algebraica. Mostrándose de forma clara los vínculos necesarios para relacionar la teoría de categorías con la lógica intuicionista. Por lo tanto, estos son los campos de la ciencia que delimitan nuestra investigación.

1.6 VIABILIDAD DEL ESTUDIO

El proyecto de investigación es viable puesto que permite generar nuevas teorías dentro de la lógica intuicionista. Además de estudiar teoría de categorías y otras teorías de las ciencias matemáticas puras y aplicadas

.

CAPÍTULO II:

MARCO TEÓRICO

2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

TESIS DE INVESTIGACIÓN 1

Título de la tesis, lugar y año de publicación.

Sobre dos lógicas categóricas: Lógica Lineal y álgebra con tipos ordinarios

Madrid 2016

Apellidos y nombres del autor

Narciso Martí, Oliet.

Institución que respalda el estudio

Universidad Complutense de Madrid: Facultad de Ciencias Matemáticas.

Conclusiones. Se presento un enfoque semántico de subtipos, donde las conversiones implícitas son distinguidas e integradas. Este enfoque permite exhibir ventajas semánticas dentro del proceso lógico demostrativo de un argumento matemático. Este trabajo es pionero en la integración de ambos enfoques. A continuación, enumeramos algunas direcciones de investigación que el trabajo presente sugiere y nosotros que creemos que merecen ser seguidas:

2.2. BASES TEORICAS

- Lambek, J. (1968), en su artículo: Deductive Systems and Categories 1, Maihematical Systems Theory 2, paginas 287-318: Mostro como las categorías algebraicas se relacionan directamente con los sistemas deductivos, los argumentos utilizados principalmente se fundamentan en el lenguaje relacional que la teoría de categorías utiliza.

- Moggi, E. (1989), en su artículo: Computational Lambda-Calculus and Monads, en: Proc. 4th. Annual IEEE Symp. on Logic in Computer Science, Asilomar, California, paginas 14—23.: Propone un análisis computacional del cálculo de secuentes basado en Lambda-Calculus. Proporciona de esta manera alguna herramienta conceptual útil para el análisis de la lógica intuicionista.
- Heyting, A. (1971), en su libro titulado: Intuitionism. An Introduction, North Holland, Ámsterdam: Fundamenta el cálculo de secuentes para la lógica intuicionista utilizando los fundamentos de la lógica algebraica y concluye que la lógica es secundaria a la matemática y que esta solo gobierna el razonamiento matemático.
- Troelstra, A. (1980), en su artículo: The interplay between Logic and Mathematics: Intuitionism, en Agazzi, E. (ed), Modern Logic. A Survey, Reidel, Dordrecht.: Sustenta que la lógica es parte de la matemática, y lo que llamamos leyes lógicas son solo las regularidades lingüísticas observadas cuando describimos ciertas operaciones muy generales de nuestras construcciones matemática.
- Quispe, M. (2019), en su tesis titulada: Sistema deductivo basado en grafos para la lógica intuicionista: Propone una versión intuicionista para los N-Grafos referentes a la demostración constructiva formal, en este sistema se representan por medio de dígrafos basados en la deducción natural y en el cálculo de secuentes de Gentzen.

Para modelar algebraicamente los fundamentos del cálculo de secuentes de la lógica intuicionista con ayuda de la teoría de categorías es necesario proporcionar instrumentos de corte teórico propicios para su fundamentación.

2.2.1. TEORÍA DE CATEGORÍAS

DEFINICIÓN DE CATEGORIA

El matemático alemán George Cantor (1845-1918) y el italiano Giuseppe Peano (1858-1932) inventaron la teoría de conjuntos con la finalidad de establecer condiciones de existencia y unicidad de los objetos matemáticos dentro de un contexto dado. Sin duda alguna esta teoría tuvo un papel importante en la fundamentación de la matemática. Cabe resaltar que esta teoría, hace posible el estudio de los objetos matemáticos a través de sus partes constitutivas (método analítico).

De otro lado, como la matemática moderna se presenta de forma estructurada, la comprensión de los objetos matemáticos requiere de una nueva óptica totalizadora que englobe la acción de estos con su entorno (método sintético); en ese contexto surge la teoría de categorías como alternativa de comprensión del marco estructuralista que el método axiomático propone.

Esta teoría proporciona a los matemáticos un lenguaje y por lo tanto una forma de razonamiento general, expresado en términos de propiedades universales con ayuda de diagramas conmutativos con la finalidad de establecer regularidades a través del comportamiento del objeto matemático. En esta sección se considera algunas definiciones expuestas en la tesis de J. Broncano (2018).

Categoría. Una categoría $(\mathfrak{C})$consta de una clase de objetos, $obj(\mathfrak{C})$, cuyos elementos son denotados por $A, B, C, \dots etc.$, tal que para todo par $(A; B)$,existe una clase de morfismos denotado por $Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ (posiblemente vacío) de modo tal que para toda terna ordenado (A, B, C) de objetos en $(\mathfrak{C})$ y todo par de morfismos y todo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)\ y\ g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; C)$, existe un morfismo llamado composición de $Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)xHom_{\mathfrak{C}}(B; C) \to Hom_{\mathfrak{C}}(A; C)$ el cual será denotado por $gof \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; C)$, los cuales satisfacen dos axiomas:

Axioma 1.

Para cada $A \in obj(\mathfrak{C})$, existe $I_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; A)$, llamado morfismo identidad, tal que para $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; A)$ se cumple

$foI_A = f \;\; y \;\; I_A og = g.$

Axioma 2.

Dado los morfismos $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B), g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; C)\; y\; h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; D)$. se verifica $h\; o\; (g\; o\; f) \;=\; (h\; o\; g)\; o\; f$.

Observación 2.2.1.1 En adelante,$obj(\mathfrak{C}) y Hom_{\mathfrak{C}}(A)$; B) son clases para evitar algunas paradojas de la teoría de conjuntos.

Diagrama. Sea la categoría $\mathfrak{C}$. Un diagrama es una colección de vértices y arcos, etiquetados de manera coherente con objetos y morfismos. Tal como se puede apreciar.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Diagrama conmutativo. Un diagrama en la categoría $\mathfrak{C}$ es llamada conmutativo si, para cualquier par de vértices $A\; y\; B$ todas las rutas en el diagrama desde A hasta B son iguales (en el sentido de que cada ruta en el diagrama determina morfismos compuestos iguales). Por ejemplo, si para todo $g'' \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; A)$ y $f'' \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; C)$, $fof =$ g o g, entonces existe un único $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\ & P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Es decir, $g" \;=\; f'\; o\; h \;\; y \;\; f" \;=\; g\; o\; h.$

Observación 2.2.1.2 Los diagramas se empelan para establecer y demostrar propiedades de las construcciones categóricas; tales propiedades a menudo se expresan diciendo que un diagrama en particular conmuta gracias a la existencia de un único morfismo que cumple tal o cual condición.

Ejemplo: Categoría de conjuntos (Set). Si definimos:

1. La clase de objetos $obj\ (Set)$ como la clase formada por todos los conjuntos.

2. Por $Hom_{set}(A; B)$ a la clase de todas las funciones de A en B.

3. La composición como la composición usual de funciones.

Entonces Set es una categoría.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría

Verificación de Axioma 1.

Dados $f \in Hom_{set}(A; B)$, $g \in Hom_{set}(B; C)$ y $h \in Hom_{set}(C; D)$

En efecto; si $a\ \in A$ entonces, por definición de $g \in Hom_{set}(B; C)$ y $h \in Hom_{set}(C; D)$ demostraremos que $h\ o\ (g\ o\ f)\ =\ (h\ o\ g)\ o\ f$.composición se tiene:

$(h\ o\ (g\ o\ f))(a)\ =\ h((go\ f)(a))\ =\ h(g(f(a)))\ =\ (h\ o\ g)(f(a))\ = ((h\ o\ g)\ o\ f)$ (a)

Es decir, $h\ o\ (g\ o\ f)\ =\ (h\ o\ g)\ o\ f$.

Verificación de Axioma 2.

Para cada $A \in obj(Set)$, demostraremos que existe $I_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; A)$

tal que $foI_A = f$ y $I_Aog = g$. Para todo $f \in Hom_{set}(A; B)$ y $g \in Hom_{set}(C; A)$.

En efecto; existe por definición de la aplicación identidad; además verifica $(foI_A)(a) = f\big(I_A(a)\big) = f(a), (I_Aog)(c) = I_A\big(g(c)\big) = g(c),$

Para todo $a\ \in\ A$ y todo $c\ \in\ C$ respectivamente.

Categoría pequeña. $\mathfrak{C}$ se llama pequeña si y solo si $obj(\mathfrak{C})$ es un conjunto.

Ejemplo: Categoría Carcaj $(\mathbb{CA})$. Un carcaj es una cuádrupla ordenada $\mathbb{CA} = (C_0, C_1, s, t)$ formada por dos conjuntos, $C_o = i, k, \dots, j$ (el conjunto de vértices) y $C_1 = \alpha, \beta, \dots., \gamma$ (el conjunto de caminos); y dos aplicaciones $s, t: C_1 \to C_0$ que asocian a cada camino $\alpha \in C_1$ su inicios $s(\alpha)$ y su fin $t(\alpha)$. Por lo tanto un carcaj se puede considerar un grafo orientado (que puede tener lazos y caminos múltiples).

Notación.

El esquema $\alpha: i \ \to \ j$ en $\mathbb{CA}$ significara: el camino dirigido a que inicia en el vértice i y termina en el vértice j. Luego un camino dirigido (de longitud n) de i a j en $\mathbb{CA}$ es una sucesión de vértices y caminos.

$(j|\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots \dots . \alpha_1|i)$ con $n \ > \ 0$ que verifica:

inicio de $\alpha_1 = i$

final de α_1 = inicio de α_2

final de α_2 = inicio de α_3

…………………………

final de $\alpha_n = j$.

Y para el caso $n \ = \ 0$ se tiene $i \ = \ j$. Luego asociamos a cada vértice i su camino trivial $e\_i = \ (i \ || \ i)$, el cual debe ser interpretado intuitivamente como permanecer en el vértice i.

Luego si definimos:

1. La clase de objetos $obj(\mathbb{CA})$ como el conjunto C_0.

2. La clase de todos los morfismos $Hom_{\mathbb{CA}}$ como el conjunto C_1.

3. La composición de dos caminos se hace por concatenación cuando esto es posible. Es decir, $\left(j\middle|\beta_p, \beta_{P-1},, \beta_1\middle|k\right)$ o $(l|\alpha_n, \alpha_{n-1},, \alpha_1|i)$ vale cero si $k \neq l$, y vale $\left(j\middle|\beta_p, \beta_{P-1}, \dots \beta_1, a_n, \alpha_{n-1},, \alpha_1\middle|i\right)$ en el caso $k \ = \ l$ entonces, $\mathbb{CA}$ es una categoría pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

Axioma 1.

La asociatividad de la composición es evidente por definición.

Axioma 2.

Por definición.

Categoría localmente pequeña. La categoría $\mathfrak{C}$ se llama localmente pequeña si para cualquier par ordenado de objetos (A, B); $Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ es un conjunto.

Ejemplo: Categoría de matrices $(\boldsymbol{Matr_R})$. Sea R un anillo conmutativo y $M_{mxn}(R)$ el conjunto de matrices con entradas en R. Si definimos:

1.La clase de objetos $obj(Matr_R)$ como la clase formada por todos los enteros positivos.

2.La clase de todos los morfismos $Hom_{Matr_R}(m; n)$ como la clase de todas las matrices $A \in M_{mxn}(R)$.

3.La composición como el producto matricial; es decir, para todo $A \in Hom_{Matr_R}(m; n)$ y $B \in Hom_{Matr_R}(p; m)$, implica que $BoA = AB \in Hom_{Matr_R}(p; n)$ entonces, $Matr_R$ es una categoría localmente pequeña.

Para tal efecto, verificaremos que se cumplen los axiomas de categoría.

Axioma 1.

La composición entre morfismos se hereda de la asociatividad del producto entre matrices.

Axioma 2.

Para cada $m \in obj(Matr_R)$ se propone como morfismo identidad $I_m \in Hom_{Matr_R}(m; m)$, a la matriz identidad de orden m.

En efecto, de la teoría básica de matrices sabemos que para toda $A \in Hom_{Matr_R}(m;n)$ se cumple $AoI_m = AI_m = A$. Análogamente, para toda $B \in Hom_{Matr_R}(n;m)$ se cumple $I_m oB = I_m B = B$.

Categoría pre-orden. Una categoría $\mathfrak{C}$ es pre- orden si, para cualesquiera $A\ y\ B$, $Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$ es vacío o unitario.

Observación 2.2.1.3 Toda categoría pre-orden es localmente pequeña.

Ejemplo: Categoría 0. Es aquella categoría sin objetos, ni morfismos. Los dos axiomas se satisfacen trivialmente porque están universalmente cuantificadas sobre conjuntos vacíos.

Ejemplo Categoría 1. Es aquella categoría que tiene un único objeto, y un único morfismo (el morfismo identidad de ese objeto). Los dos axiomas se satisfacen trivialmente porque la composición es trivial.

Principio de Dualidad.

> La teoría de dualizacion aplicada a la axiomática categórica permite estudiar sólo un aspecto de los problemas planteados, pues los resultados que se obtengan serán ciertos si y sólo si lo son sus respectivos duales. La formulación que aquí se ofrece es informal e imprecisa, para aquellos lectores que deseen mayor precisión se debe exigir una aplicación metódica de la lógica formal; por lo tanto, para aquellos interesados podrán hallar información precisa en el libro de MacLane (1971): Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-New York.

Concepto categórico. Un concepto categórico es el que se puede definir mediante una sentencia dentro de la categoría.

Principio de Dualidad. Si la sentencia categoría $\mathcal{P}$es válida en la categoría $\mathfrak{C}$, entonces su enunciado dual $\mathcal{P}^{op}$ también es válido en $\mathfrak{C}$.

Proposición 2.2.1.1 Si $\mathfrak{C}$ es una categoría, entonces $\mathfrak{C}^{op}$ también lo es y es llamada categoría dual.

1. $obj(\mathfrak{C}^{op}) = obj(\mathfrak{C})$. Por lo tanto $A^{op} \coloneqq A$ para todo $A \in obj(\mathfrak{C})$.
2. $Hom_{\mathfrak{C}^{op}}(B;A) \coloneqq Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$. Luego $f^{op}: B^{op} \to A^{op}$ es un morfismo en $\mathfrak{C}^{op}$ si y sólo si $f: A \to B$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$.

3. La composición es inducida por $\mathfrak{C}$ y se define de la siguiente manera:

$f^{op} o g^{op} \coloneqq (gof)^{op}$ para todo $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$ y todo $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B;C)$.

Demostración: Se verificará los axiomas de categoría.

Axioma 1.

Por definición de composición en $\mathfrak{C}^{op}$ y la asociatividad de la composición en $\mathfrak{C}$, se tiene.

$$h^{op} o(g^{op} o f^{op}) = h^{op} o(fog)^{op} = \big((fog)oh\big)^{op} = \big(fo(goh)\big)^{op} = (h^{op} o g^{op}) o f^{op}$$

Axioma 2.

Como C es una categoría, para todo $A \in obj(\mathfrak{C}^{op}), f \in Hom_{\mathfrak{C}}(B;A)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;C)$ existe $I_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A,A)$ tal que $I_A of = f$ y $goI_A = g$, luego $(I_A of)^{op} = f^{op}$,$(goI_A)^{op} = g^{op}$, $I_A^{op} o f^{op} = f^{op}$ y $g^{op} o I_A^{op} = g^{op}$

Observación 2.2.1.4 Por definición de categoría opuesta es evidente que $(\mathfrak{C}^{op})^{op} = C$.

2.2.2 ESTRUCTURAS ABSTRACTAS

Objetos Categóricos.

Objeto inicial. Cierto objeto de una categoría es llamado objeto inicial si desde el parte exactamente un único morfismo a cada uno de los demás objetos de la categoría.

Notación.

Se representa un objeto inicial por $0'$.

Ejemplo: En la categoría Grp, donde los objetos $obj(Grp)$ son grupos y clase de morfismos $Hom_{obj(Grp)}(A;B)$ para todo $A,B \in obj(Grp)$ son los homomorfismos entre grupos, se demuestra que cualquier grupo trivial es un objeto inicial.

En primer lugar, demostraremos que si $\{e\}$ es el grupo trivial, entonces $\{e\}$ es un objeto inicial.

En efecto; si B es un grupo cualquiera, entonces existe un homomorfismo $f : 0 \to B$. tal que $f(e) = e'$ y es evidente que es único.

De manera recíproca, demostraremos que, si A es un objeto inicial, entonces $A = \{e\}$. Para tal efecto, usaremos la demostración por contradicción. Es decir; si asumimos que $A \neq \{e\}$ y es un objeto inicial, entonces llegaremos a una contradicción.

Como $A \neq \{e\}$ admite por lo menos un elemento diferente de elemento nulo e, es decir $A = \{z, \dots \dots\}$, luego para cierto grupo $B = \{x, y, \dots ..\}$ con $x \neq y$ es posible definir los homomorfismos $f, g : A \to B$ como $f(z) = x$ y $g(z) = y$ para todo $z \in A$; los cuales obviamente son diferentes pues $x \neq y$. Por lo tanto, bajo estas condiciones A no puede ser un objeto inicial.

Objeto final. Cierto objeto de una categoría es llamado objeto final si a él llega exactamente un único morfismo de cada uno de los demás objetos de la categoría.

Notación.

Se representa un objeto final por 1.

Ejemplo: En la categoría Set, *C* es un objeto final si y sólo si es un conjunto unitario.

En efecto; demostraremos que si $C = \{*\}$ es un conjunto unitario y A un conjunto cualquiera, entonces *C* es un objeto final. Consideremos los siguientes casos.

a) Si $A = \phi$, es evidente que existe un único $f : A \to C$ llamada función vacía.

b)Si ϕ, entonces existe un único $f : A \to C$ llamada función constante $f(z) = *$; para todo $z \in A$.

Por lo tanto, *C* es un objeto final.

De manera recíproca, demostraremos que, si *C* es un objeto final, entonces *C* es un conjunto unitario.

Para verificar tal aseveración, usaremos su afirmación contrapositiva. Es decir, si *C* no es un conjunto unitario, entonces no es un objeto final. Para tal fin, consideremos los siguientes casos.

a)Si $C = \phi$, entonces no existe $f \subset A \, x \, C$, pues cada elemento de A no tendría imagen en C. Por lo tanto, C no es un objeto final.

b)Si existieran $x, y \in C$ con $x \neq y$, dado cualquier conjunto ϕ, es posible definir por lo menos dos funciones distintas $f, g : A \to C$. Por lo tanto, *C* no es un objeto final.

Objetos isomorfos. En toda categoría $\mathfrak{C}$, dos objetos A, B son isomorfos si para $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ existe $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; A)$ tal que $gof = I_A, fog = I_B$.

Lema 2.2.1. Si $1 \; y \; 1'$ son objetos finales, entonces son únicos salvo isomorfismo.

Demostración: En efecto; si $1y1'$ son objetos finales, entonces existe un único$h \in Hom_{\mathfrak{C}}(1; 1')$ y un único $h' \in Hom_{\mathfrak{C}}(1'; 1)$, tal que $hoh': 1' \to 1'$y $h'oh: 1 \to 1$. Luego por consecuencia de la unicidad de hyh' se tiene $hoh' = I_1$ y $h'oh = I_1$.

Lema 2.2.2. Si $0' \; y \; 0''$ son objetos iniciales, entonces son únicos salvo isomorfismo.

Demostración: El resultado es consecuencia directa del principio de Dualidad aplicado al Lema

Objeto cero. Cierto objeto en una categoría se llama objeto cero, si es un objeto que simultáneamente es inicial y final.

Notación.

Se representa un objeto cero por 0

Observación 2.2.1.5. Existen algunas categorías que no tienen objeto cero como es el caso de Set.

Cuando una categoría $\mathfrak{C}$ tiene objeto cero para cualquier par de $objetos\ (A;\ B)$ siempre $Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$ es diferente del vacío, pues siempre existe el morfismo composición.

$$A \rightarrow 0 \rightarrow B$$

Lema 2.2.3. En toda categoría, el objeto cero es único salvo isomorfismo.

Demostración: Se verifica por definición de objeto cero y Lema 2.2.1

2.2.3 MORFISMO CERO

Morfismo cero a izquierda. $f : A \rightarrow B$ es morfismo cero a izquierda si $f\ o\ g = f\ o\ h$, para cualquier $C \in obj(\mathfrak{C})$ y cualesquiera $g,h \in HomC(C;\ A)$.

Morfismo Cero a Derecha. $f : A \rightarrow B$ es morfismo cero a derecha si $g\ o\ f = h\ o\ f$, para cualquier $C \in obj(\mathfrak{C})$ y cualesquiera $g,h \in Hom_{\ \mathfrak{C}}(B;C)$.

Observación 2.2.1.7, Todo morfismo con dominio 0' es morfismo cero a derecha y todo morfismo con codominio 1 es morfismo cero a izquierda.

Morfismo cero. $f : A \rightarrow B$ es morfismo cero si es simultáneamente morfismo cero a izquierda y morfismo cero a derecha.

Proposición 2.2.1.2. Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con objeto cero, entonces para cada par de objetos $A,B \in obj(\mathfrak{C})$ existe un único morfismo cero en $Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$; denotado por 0_A^B.

Demostración: Ver [2].

Categoría con morfismo cero. Si para todo $A,B \in obj(\mathfrak{C})$ existe $0_A^B: A \rightarrow B$ que verifica cada uno de los siguientes ítems:

a) $ho0_A^B = 0_A^C$, para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y $heHom_{\mathfrak{C}}(B;C)$.
b) $0_A^B oh' = 0_C^B$, para todo $C \in obj(\mathfrak{C})$ y $h'eHom_{\mathfrak{C}}(C;A)$. Entonces se dice que la categoría $\mathfrak{C}$ posee morfismos cero.

Observación 2.2.1.8 En toda categoría la colección de morfismos cero 0_A^B es única.

Proposición 2.2.1.3 Toda categoría con objeto cero es una categoría con morfismos cero.

Demostración: Ver [2].

2.2.4 EQUALIZADOR Y COEQUALIZADOR

Si consideramos intuitivamente los núcleos como los objetos formados por elementos que verifican una igualdad, y los conucleos como cocientes, resulta natural generalizar estas construcciones a otras categorías donde la noción de cero no exista, pero si una noción de igualdad. Por este motivo se define el equalizador y coequalizador.

Equalizador. El Equalizador de $f, g : A \to B$ es el par (D, h), donde, el morfismo $h : D \to A$ satisface $f\ o\ h = g\ o\ h$ y el objeto D es universal respecto de esta propiedad. Para todo morfismo $f' \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; A)$ que satisface $fof' = gof'$, existe un único $h' \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; D)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "h"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dotted, "h'"] \arrow[ur, "f'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.1.3 Si $(D, h) y (D', h')$ son equalizadores de $f, g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ entonces D es isomorfo a D' y el isomorfismo conmuta con los morfismos $h\ y\ h'$.

Demostración: El resultado es consecuencia de la definición de equalizador.

Proposición 2.2.1.4 Si $f': D' \to D$ es isomorfismo y (D, h) es un equalizador de $f, g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$ entonces $(D', h\ o\ f')$ es un equalizador Para $f\ y\ g$.

Demostración: Ver [2].

Proposición 2.2.1.5 El núcleo$(ker(f), K)$ del morfismo $f : A \to B$ es el equalizador de $f, 0 \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$.

Demostración: El resultado se obtiene por la propiedad universal de K respecto del morfismo $ker(f)$.

Lema 2.2.4 Toda categoría $\mathfrak{C}$ con objeto cero si tiene ecualizador, entonces tiene núcleos.

Demostración: El resultado se deduce por la Proposición 2.2.1.5.

Coequalizador. El coequalizador de $f, g : A \rightarrow B$ es el par (E, h), donde el morfismo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; E)$ satisface la igualdad $h\ o\ f = h\ o\ g$ y el objeto E es universal respecto de esta propiedad. Para todo $h' \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; C)$ con $h'of = h'og$ existe un único $f' \in Hom_{\mathfrak{C}}(E; C)$ que hace al siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h'"'] & E \arrow[d, dotted, "f'"] \\
 & & C
\end{tikzcd}$$

2.2.5. Pushout y Pullback

Pullback. Un Pullback para los morfismos $g : A \rightarrow B$ y $f : C \rightarrow B$ ocurre si y solo si, los morfismos $f'\ y\ g'$ satisfacen las siguientes propiedades:

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

b) Para todo $g'' \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; A)$ y $f'' \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; C)$ si $fof'' = gog''$, existe un único $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
 & P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & C \arrow[d, "f"] \\
 & A \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Es decir $g'' = f'\ o\ h\ y\ f'' = g'\ o\ h$.

Lema 2.2.4 Dado el Pullback para $g : A \to B$ y $f : C \to B$

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "f''"'] & C \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

es otro Pullback para $f \ y \ g$, entonces existe un único isomorfismo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P; P')$ tal que $f' = f'' \, o \, h \ y \ g' = g'' \, o \, h$.

Demostración: Ver [2].

Pushout. Un Pushout para $g : A \to C$ y $f : A \to B$ ocurre si y sólo si, los morfismos $f' \ y \ g'$ satisfacen las siguientes propiedades.

a) Conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\ C \arrow[r, "f'"'] & P \end{tikzcd}$$

b) Para todo $f'' \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; P')$ y $g'' \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; P')$ si $f''of = g''og$, entonces existe un único $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P; P')$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \arrow[ddr, bend left, "f''"] & \\
C \arrow[r, "f'"] \arrow[drr, bend right, "g''"'] & P \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & P'
\end{tikzcd}
$$

Lema 2.2.5 Dado el Pushout para $g : A \rightarrow C$ y $f : A \rightarrow B$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g'"] \\
C \arrow[r, "f'"'] & P
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "g''"] \\
C \arrow[r, "f''"'] & P'
\end{tikzcd}
$$

también es Pushout de $f\ y\ g$, entonces existe un único isomorfismo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; P)$ tal que $g' = h\ o\ g''$ y $f' = h\ o\ f''$.

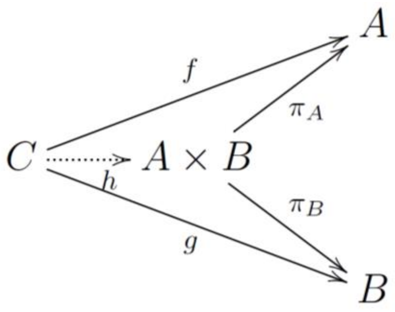
Demostración: Ver [2].

2.2.6. PRODUCTO Y COPRODUCTO

Producto. El producto de dos objetos $A, B \in \mathfrak{C}$ es el triplete $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$, con $A \times B \in obj(\mathfrak{C})$, $\pi_A \in HomC(A \times B; A)$ y $\pi B \in HomC(A \times B; B)$, llamados proyecciones canónicas, los cuales cumplen la siguiente propiedad universal respecto al objeto

$A \times B$.

Dado $C \in obj(\mathfrak{C})$ si $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; A)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; B)$ entonces existe un único $h = (f, g) \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; AxB)$ tal que $\pi_A oh = f$, $\pi_B oh = g$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.



Proposición 2.2.1.6 Si $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ es el producto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ y existe un isomorfismo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; A \times B)$, entonces $(P'; \pi_A oh, \pi_B oh)$ también es un producto de $A\ y\ B$.

Demostración: Dado $Ce \in obj(\mathfrak{C})$ y $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; A)$, $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; B)$, demostraremos que existe un único $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; P')$ tal que$(\pi_A oh)oh = f$ y $(\pi_B oh)oh = g$.

En efecto; como $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ es el producto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$ existe un único morfismo $g' \in Hom\ _{\mathfrak{C}}(C; A \times B)$ tal que $\pi_A og' = f$ y $\pi_B og' = g$.

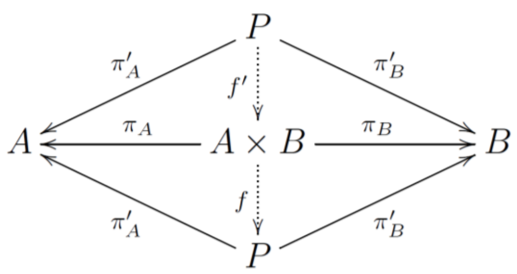
Como $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(P'; AxB)$ es un isomorfismo existe $h - 1 \in Hom_{\mathfrak{C}}(A \times B; P')$.

Por lo tanto, si definimos $h = (h - 1og') \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; P')$, entonces existe un único morfismo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C; P')$ tal que

$$(\pi_A oh)oh = f \text{ y } (\pi_B oh)oh = g.$$

Teorema 2.2.1.1. Si $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ y (P, π'_A, π'_B) son los productos de los objetos $A, B\ \in\ C$, entonces $A \times\ B$ es isomorfo a P.

Demostración: Del diagrama conmutativo adjunto,



se deduce:

$$(\pi'_A o f) o f' = \pi'_A o (f o f') = \pi'_A o f' = \pi'_A o I'_P$$

$$(\pi'_B o f) o f' = \pi'_B o (f o f') = \pi'_B o f' = \pi'_B o I'_P$$

Es decir, $I'_P y f o f'$ hacen conmutar el diagrama, luego por la unicidad en la definición del producto se deduce $f o f' = I_P$ y de manera Simétrica se obtiene $f' o f = I_{AxB}$. Por lo tanto, $A\ x\ B$ es isomorfo a P.

Lema 2.2.6. Si $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y producto y definimos $\delta_{jk} \in Hom_{\mathfrak{C}}(A_j; A_k)$ para cada $j, k \in 1,2$ tal que $\delta_{jk} = 0$ cuando $j \neq k$ y $\delta_{jj} = I_{Aj}$, entonces existen $i_{Aj} \in Hom_{\mathfrak{C}}(A_j; A_1 x A_2)$ llamados inclusiones, tales que $\pi_{Ak} o i_{Aj} = \delta_{jk}, \forall j, k$.

Demostración: La afirmación se deduce de los siguientes diagramas conmutativos y la propiedad universal de producto, se logra verificar.

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
A_1 \arrow[urr, "I_{A_1}"] \arrow[drr, "0"'] \arrow[r, dotted, "i_1"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_{A_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{A_2}"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & A_1 \\
A_2 \arrow[urr, "0"] \arrow[drr, "I_{A_2}"'] \arrow[r, dotted, "i_2"'] & A_1 \times A_2 \arrow[ur, "\pi_{A_1}"'] \arrow[dr, "\pi_{A_2}"] & \\
 & & A_2
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.1.7 Si $\mathfrak{C}$ es una categoría con productos binarios, entonces para $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; C)$ y $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; D)$, existe un único morfismo $f \times g$ definido por $f \times g = (f o \pi_A, g o \pi_B) \in Hom_{\mathfrak{C}}(A \times B; C \times D)$

tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[rr, "f"] & & C \\
A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] \arrow[rr, dotted, "f \times g"'] & & C \times D \arrow[ur, "\pi_C"'] \arrow[dr, "\pi_D"] & \\
 & B \arrow[rr, "g"'] & & D
\end{tikzcd}$$

Demostración: Se deduce por la definición de producto.

Observación 2.2.1.9 Por definición de producto, se cumple cada una de las siguientes proposiciones.

a) $I_A \times I_B = I_{A\times B}$

b) $(f, g)\ o\ h\ =\ (f\ o\ h, g\ o\ h)$.

c) $(f \times g) o\ (h \times\ f') =\ (f\ o\ h) \times (g\ o\ f')$.

d) $(f \times\ g)\ o\ (h, f')\ =\ (f\ o\ h, g\ o\ f')$.

Teorema 2.2.1.2 En toda categoría, si existe $A \times (B\ \times\ C)$ y $(A\ \times\ B) \times C$, entonces son isomorfos.

Demostración: Ver [2].

Teorema 2.2.1.3 En toda categoría si existen los productos binarios, entonces existe el producto para un numero finito de objetos.

Demostración: La demostración utiliza el principio de inducción matemática y el Teorema 2.2.1.3.

Coproducto. El coproducto de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$,es el triplete $(A \coprod B\ , i_A, i_B)$, donde $A \coprod B \in obj(\mathfrak{C})$, $i_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, A \coprod B)$ e $i_B \in HomC(B, A \coprod B)$, llamados inclusiones canónicas, que satisfacen la siguiente propiedad universal. Dado $C \in obj(\mathfrak{C})$, $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A, C)$ y $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(B, C)$, existe un único morfismo $g \coprod h \in Hom_{\mathfrak{C}}(A \coprod B\ , C)$ tal que $foi_A = g$, $foi_B = h$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_A"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
& A \coprod B \arrow[r, dotted, "f"] & C \\
B \arrow[ur, "i_B"] \arrow[urr, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Proposición 2.2.1.8 Dado el coproducto $(A \coprod B, i_A, i_B)$ de $A, B \in obj(\mathfrak{C})$, si existe un isomorfismo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(A \coprod B ; Q)$, entonces $(Q; hoi_A, hoi_B)$ también es un coproducto para $A\ y\ B$.

Demostración: El resultado se deduce por el Principio de Dualidad aplicado a la Proposición 2.2.6.

Proposición 4.2.1.9 Si $(A \coprod B, i_A, i_B)$ y (Q, i_A, i_B) son coproductos de los objetos A; B, entonces $A \coprod B$ es isomorfo a Q.

Demostración: Se verifica por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 2.2.1.3.

Teorema 2.2.1.4. Si existen $A \coprod (B \coprod C)$ y $(A \coprod B) \coprod C$, entonces son isomorfos.

Demostración: Se deduce por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 2.2.1.3.

Teorema 2.2.1.5 Sea $\mathfrak{C}$ una categoría con objeto cero y coproductos, si para cada $j, k \in 1{,}2$, se define $\delta_{jk} \in Hom_{\mathfrak{C}}(A_j; A_k)$ tal que $\delta_{jk} = 0$ cuando $j \neq k$ y $\delta_{jj} = I_{Aj}$, entonces existen $\pi_{A_j} \in Hom_{\mathfrak{C}}(A_1 \coprod A_2 ; A_j)$, tales que $\pi_k oi_{A_j} = \delta_{jk}, \forall j, k$.

Demostración: Se deduce por el Principio de Dualidad aplicado al Lema 2.2.5. □

Teorema 2.2.1.6 En toda categoría si existe coproductos binarios, entones existe el coproducto para un número finito de objetos.

Demostración: Se deduce por el Principio de Dualidad aplicado al Teorema 2.2.1.5.

2.2.7 FUNTOR

En toda categoría $\mathfrak{C}$ se puede apreciar, que la clase $Hom_{\mathfrak{C}}$ cobra sentido explícito cuando para todo par ordenado de objetos (A, B) se define $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$. Luego si definimos $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$: $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$: se deduce que $Hom_{\mathfrak{C}}(A, B)$ nos permite establecer conexiones entre diversos objetos. Por lo tanto, es necesario definir la noción de preservación de estructura entre dos categorías en el sentido: objetos-objetos, morfismo-morfismo, morfismo identidad- morfismo identidad y la misma operación de composición. En ese sentido se requiere definir a los funtores.

Funtor o Funtor Covariante. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un funtor covariante de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ (denotado como $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ consiste en dos aplicaciones:

1. La aplicación objeto $\mathcal{F}$, que asigna a cada objeto A de $\mathfrak{C}$ un objeto $\mathcal{F}(\mathrm{A})$ de $\mathfrak{D}$
2. La aplicación morfismo $\mathcal{F}$, que asigna a cada morfismo $\mathcal{F}: \mathrm{A} \to B$ de $\mathfrak{C}$ morfismo.$\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ de $\mathfrak{D}$.

Y satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1.

$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$

Axioma 2.

Para cada $A \in \mathfrak{C}, \mathcal{F}(I_A) = I_{\mathcal{F}(A)}$

Ejemplo 2.2.1. Sean las categorías $\mathfrak{C}$ y set. Si A es un objeto fijo en $\mathfrak{C}$

entonces $Hom_{\mathfrak{C}}(A; -)$: C$\to$ Set es un funtor covariante.

Para verificar la afirmación se debe observar cómo actúa $Hom_{\mathfrak{C}}(A, -)$ sobre los objetos y morfismos de $\mathfrak{C}$. Es decir:

$$Hom_{\mathfrak{C}}(A; —): obj(\mathfrak{C}) \to obj(Set)$$

$$B \to Hom_{\mathfrak{C}}(A; —)(B) = Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$$

$$Hom_{\mathfrak{C}}(A: -): Hom_{\mathfrak{C}}(B: C) \dashrightarrow Hom_{Set}(\mathcal{F}(A): \mathcal{F}(C))$$

$$f \longrightarrow Hom_{\mathfrak{C}}(a; -)(f) = Hom_{\mathfrak{C}}(a: f)$$

con:

$$Hom_{\mathfrak{C}}(A; f): Hom_{\mathfrak{C}}(A; B) \rightharpoonup Hom_{\mathfrak{C}}(A; C)$$

$$h \to Hom_{\mathfrak{C}}(A; f)(h) = f \circ h$$

satisface los dos axiomas de funtor covariante.

Axioma 1

Si $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(B;C) \wedge g \in Hom_{\mathfrak{C}}(C:D)$ entonces $g \circ f \in Hom_{\mathfrak{C}}(B;D)$ por lo tanto: $Hom_{\mathfrak{C}}(A; g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ h$

= g o (f o h) $g \circ (f \circ h) = Hom_{\mathfrak{C}}(A; g)(f \circ h)$

$= Hom_{\mathfrak{C}}(A; g)\big(Hom_{\mathfrak{C}}(A; f)(h)\big)$

$= (Hom_{\mathfrak{C}}(A; g) \circ Hom_{\mathbb{C}}(A; f))(h)$

para todo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$.

Axioma 2.

Como para cada $B \in obj(\mathfrak{C})$ existe$I_B \in Hom_{\mathfrak{C}}(B; B)$, se tiene

$Hom_{\mathfrak{C}}(A; I_{B)})(g) = I_B \circ g = g = I_{Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)} \circ g$ para todo $g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A; B)$:

Funtor contravariante. Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Un funtor contravariante de $\mathfrak{C}$ en $\mathfrak{D}$ (denotado como $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$)consiste en dos aplicaciones:

1. La aplicación objeto $\mathcal{F}$, que asigna a cada objeto A de C un objeto $\mathcal{F}(A)$ de $\mathfrak{D}$.
2. La aplicación morfismo $\mathcal{F}$, que asigna a cada morfismo $f : A \to B$ de C el morfismo $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(B) \dashrightarrow \mathcal{F}(A)$ de $\mathfrak{D}$.

Y satisface los siguientes axiomas:

Axioma 1.

$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(A)$.

Axioma 2.

Para cada A $\in \mathfrak{C}$, $\mathcal{F}(I_A) = I_{\mathcal{F}(A)}$

Los funtores que preservan la dirección de morfismos se llaman funtores covariantes y los que cambian su dirección se llaman funtores contravariantes.

Ejemplo 2.2.2. Sean las categorías $\mathfrak{C}$ y Set. Si B es un objeto fijo en $\mathfrak{C}$, entonces $hOM_{\mathfrak{C}}(-;B) \dashrightarrow Set$ es un funtor contravariante.

Para verificar la afirmación se debe observar cómo actúa $Hom_{\mathfrak{C}}(-;B)$ sobre los objetos y morfismos de $\mathfrak{C}$. Es decir:

$$hom_{\mathfrak{C}}(-;B); obj(\mathfrak{C}) \dashrightarrow obj(Set)$$

$$A \to Hom_{\mathfrak{C}}(-;B)(A) = Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$$

$$Hom_{\mathfrak{C}}(-;B): Hom_{\mathfrak{C}}(A;B) \dashrightarrow Hom_{Set}(\mathcal{F}(A): \mathcal{F}(B))$$

$$f \longrightarrow Hom_{\mathfrak{C}}(-;B)(f) = Hom_{\mathfrak{C}}(f;B)$$

Son

$$Hom_{\mathfrak{C}}(f;B): Hom_{\mathfrak{C}}(A;B) \dashrightarrow Hom_{\mathfrak{C}}(C;B)$$

$$h \longrightarrow Hom_{\mathfrak{C}}(f;B)(h) = h \circ f$$

Se verifica que $Hom_{\mathfrak{C}}(-;B): \mathfrak{C} \longrightarrow Set$ satisface los dos axiomas de funtor contravariante:

Axioma 1.

Si $f \in Hom_{\mathfrak{C}}(C;A)$ g$g \in Hpm_{\mathfrak{C}}(C;D)$ entonces para todo $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(C;A)$ y $h \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$ se cumple

$$Hom_{\mathfrak{C}}(f \circ g; B(h) = h \circ (f \circ g) = h \circ f) \circ g$$

$$Hom_{\mathbb{C}}(g;B)(h \circ g) = Hom_{\mathfrak{C}}(g;B)\big(Hpm_{\mathfrak{C}}(f;B)(h)\big)$$

$$= (Hom_{\mathfrak{C}}(g;B) \circ (Hom_{\mathfrak{C}}(f;B))(h)$$

Axioma 2.

Como para cada A ∈ obj ($\mathfrak{C}$), existe $I_A \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;A)$, se deduce

$$Hom_{\mathfrak{C}}(I_A;B)(g) = g \circ I_A = g \circ (I_{I_{omM_{\mathfrak{C}}(;A;B)}} \text{ para todo } g \in Hom_{\mathfrak{C}}(A;B)$$

Composición de funtores. Sean los funtores $\mathcal{F}: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y $g: \mathfrak{D} \longrightarrow B$.Ls composición $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ se define como:

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathcal{G}(\frac{\mathcal{F}}{A}) \text{ y } (g \circ \mathcal{F})(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f)$$

Observación 2.2.1 En toda categoría$\mathfrak{C}$, si definimos $I: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}$ como $I(A) = A \wedge I(f) = f$, y cumple los siguientes axiomas:

Axioma 1.

$I(g \circ f) = g \circ f = I(g) \circ I(f)$

Axioma 2.

$I(I_A) = I_A = I_{I(A)}$ Por lo tanto, es un funtor y sería llamado funtor identidad.

Proposición 2.2.1 Si definimos:

1. La clase de objetos obj (Cat) como la clase formada por todas las categorías.

2. La clase de todos los morfismos $Hom_{Cat}(\mathfrak{C}; \mathfrak{B}$ como la clase de todos los funtores entre las categorías $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{B}$.

3. La composición como la composición definida en 2.2.3 entonces Cat es una categoría, llamada categoría de categorías.

Demostración: Evidente por Definición 2.2.3 y Observación 2.2.1. □

4.3.1. Propiedades que Preservan los Funtores

Funtor que preserva productos. Se dice que el funtor $\mathcal{F}; \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ preserva productos, si $\mathcal{F}(A \times B)$; ,$\mathcal{F}(\pi_1), \mathcal{F}(\pi_2)$ es un producto de $\mathcal{F}(A)$ y $\mathcal{F}(B)$ en la categoría $\mathfrak{B}$

Funtor y objeto cero. El funtor $\mathcal{F}; \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ preserva objeto cero, si $\mathcal{F}(0)$) es objeto cero en la categoría $\mathfrak{B}$

Funtor y morfismo cero. Se dice que el funtor $\mathcal{F}; \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ preserva morfismo cero si $\mathcal{F}(0)$) es un morfismo cero en la categoría $\mathfrak{B}$.

Lema 2.2.1 Sea $\mathcal{F}; \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{B}$ es un funtor. $\mathcal{F}$ preserva objeto cero si y sólo si $\mathcal{F}$ preserva morfismos cero.

Demostración: El resultado es consecuencia directa del siguiente hecho. Un objeto en una categoría está caracterizado por su morfismo identidad.

2.2.8 LÓGICA PROPOSICIONAL

La lógica determina las reglas del razonamiento estructurado y establece un puente entre los lineamentos del proceso constructivo del sistema axiomático y la creatividad humana. Félix D. Aira C. (1979-?)

LÓGICA CLÁSICA

Aristóteles, con su obra el Órganon referenció, un importe ámbito del conocimiento, pues el inefable proceso de búsqueda ontológica del ser, encasillo la argumentación del pensamiento humano dejándolo sin ninguna directriz. Posteriormente los filósofos racionalistas (Descartes, Leibniz) del siglo XVII, transformaron la lógica Aristotélica en la plataforma de la ciencia que habría de desarrollarse posteriormente.

A mediados del siglo XIX se inicia con la matematización de la lógica y entre ellas se destaca la propuesta de Boole: El análisis matemático de la lógica. En ella se observa cómo a partir de la definición de tres tipos de signos estable un lenguaje para el estudio de la lógica. Posteriormente, la teoría de conjuntos se desarrolla con los trabajos de Cantor y Zermelo y se usan como instrumento para la fundamentación de la matemática. La lógica se convierte en ese momento en el andamiaje deductivo por excelencia donde sus reglas rigen los argumentos del razonamiento demostrativo.

2.2.8.1 HISTORIA DE LA LÓGICA POR SU OBJETO DE ESTUDIO

La expresión lógica (logike), significa: Dotado de razón, intelectual, dialectico, argumentativo. Por lo tanto; proviene de (logos): Palabra, pensamiento, idea, argumento, razón o principio. En ese sentido queda delimitada la concepción de dos lógicas: la lógica de la filosofía, iniciada por Platón, y la lógica matemática, de Aristóteles. Los cuales han tenido significados diferentes a lo largo de su desarrollo histórico, motivados por su propósito como su objeto de estudio o del valor epistémico de sus conclusiones.

1. **La lógica griega**. La cultura griega se caracterizó, por el rol destacado que tenía el discurso y la palabra, dentro de su sociedad. Los sabios y maestros de oratoria, conscientes del valor de sus enseñanzas, no desaprovecharon la oportunidad y fueron de isla en isla, de puerto en puerto, enseñando la retórica, escribiendo leyes y constituciones.

2. **La lógica medieval**. Está orientada al fundamento y argumento racional de la búsqueda de lo divino: la argumentación Teológica de Santo Tomas es un ejemplo de cómo la lógica puede ser utilizada para resolver (o pretender resolver) esta clase de problemas. Finalmente, uno de los aportes a destacar son las tres Leyes de la Lógica:

Ley de identidad. Todo ente es un ente

Ley de contradicción. Ningún ente es y no es

Ley del tercero excluido. Los entes son o no son.

3.**La lógica moderna.** Es una etapa del conocimiento humano, donde el racionalismo hace prevalecer la universalidad de las verdades matemáticas dentro de los contextos científicos, sustentados en la abstracción de sus objetos y sus argumentos. En ese sentido se pretende lograr un simbolismo universal libre de antigüedades.

4. **La lógica matemática.** Tiene por finalidad introducir argumentos meta matemáticos en el ámbito de la lógica, este favoreció el pensamiento analítico de los conceptos lógicos, despojando a los argumentos propios de la lógico su valor filosófico. A partir de esta concepción la lógica experimentaría un desarrollo sustantivo en sus alcances, conceptos y métodos. Como resultado de ello se hace posible dos formas de abordar su estudio: desde el punto de vista del significado de sus símbolos (la semántica) o de su manipulación (sintaxis).

2.2.8.2 **¿QUÉ ES LA LÓGICA?**

En esta tesis asumimos que la lógica en general es el estudio del razonamiento válido o correcto y para definir una lógica en particular se debe definir un lenguaje artificial; con un alfabeto y unas reglas gramaticales de formación de expresiones bien formadas (ebf) a los cuales se les atribuye significado mediante interpretaciones semánticas.

La lógica se ha aplicado con éxito a la matemática y a su fundamento (G. Frege, B. Russell, D. Hilbert, P. Bernays, H. Scholz, R. Carnap, T. Skolem), a la física (R. Carnap, A. Dittrich, B. Russell, E. Shannon, N Whitehead, P. Fevrier), a la biología (H. Woodger, A. Tarski), a la psicología (B. Fitch, G. Hempel), al derecho y a la etica (K. Menger, U. Klug, P. Oppenheim), a la economía (J. Neumann, O. Morgenstern), a la metafísica (J. Salamucha, H. Schoz, M. Bonchenski), por ultimo cabe resaltar sus aplicaciones a la ciencia de la computación han sido extremadamente provechosas.

2.2.8.3 ¿PORQUE LA LÓGICA CENTRA SU ATENCIÓN EN EL LENGUAJE?

Como el pensamiento no tiene un componente material; entonces no podemos enfocarnos concretamente en algo físico, Pero como este se manifiesta por medio del lenguaje. Podemos concluir que lenguaje y pensamiento tiene una relación intrínseca, ya que no puede desarrollarse el pensamiento sin el lenguaje, y no puede darse el lenguaje sin el pensamiento. Por esta razón la lógica centra su atención en el lenguaje pues este disfraza el pensamiento.

2.2.9 FUNDAMENTOS

Como la ciencia es un conjunto de conocimientos obtenidos mediante la observación y el razonamiento, sistemáticamente estructurados y de los que se deducen principios y leyes generales, es necesario establecer un marco deductivo para su argumentación y fundamentación.

Proposición. Una proposición es un discurso enunciativo que expresa un juicio y posee un significado que es verdadero o falso.

Alfabeto. Un alfabeto $\mathfrak{U}$ es un conjunto de símbolos, llamados símbolos primitivos

$\{ \gamma, \cup, \phi, \ldots\ldots\}$

Lenguaje. El lenguaje formal para representar la lógica proposicional $\mathcal{L}$ es definido por los siguientes elementos:

1. Un alfabeto $\mathfrak{U}$, dividido en:

a) Símbolos de aridad cero, $\Omega_0 = (,), P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots$ los cuales a su vez, se clasifican en símbolos de agrupación: {(;)}, y en letras proposicionales: $A_{to} = \{P_0, P_1, P_2, \ldots \ldots\}$.

b) Los conectivos de aridad uno, $\Omega_1 = \neg$

c) Los conectivos de aridad dos, $\Omega_2 \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee$

Además, estos conectivos serán llamados del siguiente modo:

Conectores
$\sim$ (negación),
$\wedge$ (conjunción),
$\vee$ (disyunción),
$\Rightarrow$ (condicional),
$\Leftrightarrow$ (bicondicional)

Figura 1: Nombres de los conectores lógicos.

2. Unas reglas de transformación que indican cómo obtener una ebf (llamadas proposiciones) de $\mathcal{L}$ a partir de otra u otras ebf . Más precisamente, establecen que una ebf es inmediatamente deducible como conclusión a partir de un conjunto finito de ebf tomadas como premisas.

R_1 Cada $P_i \in A_{t_0}$ es una proposición.

R_2 Si ʊ es una proposición, entonces ¬ʊ es una proposición.

R3 si $\Delta \in \Omega_2$ y p, q ∈ A_{to}, entonces $p\Delta q$ es una proposición.

R4 ninguna otra cosa formada con ayuda de $\mathfrak{U}$ es una proposición.

Teorema 2.2.1 Una propiedad se cumple para toda proposición de $\mathcal{L}$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Todas las proposiciones $p \in A_{t_0}$ o cumplen la propiedad.

2. Si la proposición ʊ cumple la propiedad, entonces ¬ʊ cumple la propiedad.

3. Si cualesquiera dos proposiciones $\mho$ y ϕ cumplen la propiedad entonces también la cumplen ($\mho \, \Delta \, \phi$) para todo Δ e Ω_2 y toda proposición

$$\mho \, , \phi \in \mathcal{L} \, .$$

Demostración: En efecto; si suponemos que todas las proposiciones de $\mathcal{L}$ cumplen con la propiedad, entonces por R_1 todo $p \in A_{t_0}$ los cumplen. Por lo tanto, se verifica (1). De otro lado, por las reglas R_2 y R_3 se verifican simultáneamente las condiciones (2) y (3).

De manera recíproca, si suponemos que se cumplen las condiciones (1), (2) y (3), entonces demostraremos que toda proposición de $\mathcal{L}$ la cumple.

En efecto; la demostración sería hecha por inducción sobre la longitud de las proposiciones.

Si $\mho$ tiene longitud uno, entonces $\mho \in A_{to}$ y por la regla R_1 se concluye que $\mho$ cumple la propiedad. Ahora supongamos que toda $\mho \in \mathcal{L}$ tiene longitud y cumple con la propiedad, entonces por R_2 y R_3 se concluye que $\mho$ también cumple con la propiedad. Por lo tanto, para cualquier número natural m, si la longitud de $\mho$ es m, entonces la proposición $\mho$ cumple con la propiedad, con lo que se verifica la afirmación.

Lema 2.2.1 Todas las proposiciones de $\mathcal{L}$ tienen tantos paréntesis izquierdos como paréntesis derechos.

Demostración: Si definimos la propiedad P: tiene tantos paréntesis izquierdos como derechos, entonces demostraremos que P satisface las reglas (1); (2) y (3) del teorema 2.2.1. En efecto.

1. Las letras proposicionales $p \in A_{to}$ tienen 0 paréntesis izquierdos y 0 paréntesis derechos. Por lo tanto, cada p cumplen la propiedad P.

2. Supongamos que $\mho \in \mathcal{L}$ cumple con P, entonces $\neg\mho$ tiene los mismos paréntesis que $\mho$, es decir $\neg\mho$ cumple con P.

3. Finalmente supongamos que $\upsilon, \phi \in \mathcal{L}$ cumplen con P. Entonces (ʊΔϕ) tiene los mismos paréntesis de υ, ϕ y un izquierdo más y un derecho más. Por lo tanto (ʊΔϕ) cumple con P.

Axiomas. Es un subconjunto de las ebf (proposiciones) de $\mathcal{L}$ de las cuales se deducen otras proposiciones formales mediante la aplicación de las reglas de transformación del lenguaje.

Los axiomas, no tienen significado ni valor de verdad. En particular, no son enunciados verdaderos y, por tanto, no se los elige por su evidencia.

Teoremas. Son $ebfs$ de $\mathcal{L}$ que se deducen de los axiomas mediante la aplicación de alguna regla de transformación. Los axiomas se consideran deducibles de sí mismas, por lo tanto, son teoremas. Así, el conjunto de los axiomas de $\mathcal{L}$ está incluido en el de los teoremas.

SEMÁNTICA

En lógica la semántica es un instrumento para dar la noción de validez y/o veracidad.

Concepto de Semántica. Una semántica se define como el par $\left(A_{t_0,}, \vdash\right)$ donde ⊢ es una relación de satisfactibilidad definida de la siguiente manera:

1. $.S; A_{t_0} \longrightarrow [V; F]$
2. Una función entre $\mathcal{L}$ y el conjunto {V, F}.
3. Si S (p) = V, entonces p es verdadero y si S (p) = F, entonces p es falso.

PC-modelo. Un PC modelo para el conjunto de proposiciones Γ de cierto $\mathcal{L}$ es una función$\upsilon\colon \Gamma \longrightarrow \{V, F\}$ tal que:

1. Una función $\upsilon(p) = S(p), p \in \Gamma$

2. $\upsilon(p \vee q) = F \Leftrightarrow \upsilon(p) = F, \wedge\ \nu(q) = F$.

3. $\upsilon(p \wedge q) = F \Leftrightarrow \upsilon(p) = V, \wedge\ \nu(q) = V$

4. $\upsilon(p \longrightarrow q) = F \Leftrightarrow \upsilon(p) = V, \wedge\ \nu(q) = F$ ʋ (p —y q) = F F.

5. $\upsilon(\neg p) = V \Leftrightarrow \upsilon(p) = F$.

Formal de Semántica. Formalmente una semántica S (o un PC-modelo) se define como el par $(\Gamma; \vdash)$ donde $\vdash$, es una relación de satisfactibilidad entre las proposiciones del lenguaje $\mathcal{L}$ y el conjunto {V, F} que cumple las siguientes condiciones:

1.$p \vdash sq$ si υ(p) = V, entonces υ(q) = V.

2.Dada una colección de proposiciones Γ de $\mathcal{L}$ $\Gamma \vdash Sq$ si $\nu(q) = V$V para cada ebf de Γ.

3. $\vdash Sp.$ ├ si p es válida para todas las proposiciones de $\mathcal{L}$

Razonamiento. Es cualquier secuencia finita de proposiciones de $\mathcal{L}$ que tiene la siguiente estructura:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \ldots \wedge P_n \Rightarrow q.$$

Donde n es un número entero positivo. A las proposiciones $P_i; i = 1,2, \ldots.., n$ se les llama premisas del razonamiento y a la proposición q, conclusión del mismo.

Razonamiento válido. Es todo razonamiento donde la conclusión q es verdadera cada vez que todas las premisas $P_{i:}\ i = 1,2,3, \cdots n$ lo sean.

Observación 2.2.1. Un razonamiento válido también se llama inferencia y queda representado por el siguiente esquema.

$$\begin{array}{rc} & p_1 \\ & p_2 \\ & \vdots \\ & p_n \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Falacia. Es un razonamiento no válido.

Demostración. Es un razonamiento que establece la veracidad de un teorema.

LOS CONECTIVOS LÓGICOS Y TABLAS DE VERDAD

Cada elemento de Ω_1 y Ω_2 son distinguibles una de otra por sus valores de verdad. Esto quiere decir que el significado de cada conectivo lógico puede ilustrarse mediante una tabla, conocida como tabla de verdad.

Tabla de verdad. Una tabla de verdad es un arreglo rectangular que contiene los valores veritativos de la proposición y en cada línea se muestra un posible valor.

A continuación, presentamos la tabla de verdad asociada a cada una de las operaciones definidas en la lógica proposicional.

ϕ	$\neg\phi$
V	F
F	V

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

ϕ	ψ	$\phi \rightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

ϕ	ψ	$\phi \leftrightarrow \psi$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Figura 2: Tabla de Verdad.

LA ARGUMENTACIÓN Y LA LÓGICA

Estudiar y fundamentar la lógica, es capturar la estructura del propio conocimiento humano, pues se encuentran estructurados en enunciados del discurso racional, con ciertas peculiaridades discursivas y como se quiere develar el instrumental deductivo de ese discurso, deben ser modelos con las herramientas deductivas de la lógica. En ese sentido surge un problema con el aparato deductivo de la lógica, cuando nos referimos a la fundamentación los razonamientos, los argumentos y las deducciones. Indubitablemente ante este hecho surgen las siguientes preguntas:

¿Qué conectivos lógicos deben ser estudiados y analizados para representar la estructura de los argumentos del discurso que se produce en determinados contextos discursivos? y ¿Que reglas sintácticas y que definiciones formales se deben imponer?

Reglas de inferencia. Es una ley racional, utilizada como patrón para realizar un razonamiento de manera valida.

INTERPRETACIÓN ALGEBRAICA DE LA LÓGICA

Se puede interpretar algebraicamente la lógica proposicional por medio de la definición de dos operadores; la negación y la disyunción. Tales operadores conectan variables proposicionales, las cuales poseen valores de verdad.

ARGUMENTO LÓGICO DE UN GRUPO

Dada la estructura algebraica de grupo (G, *), donde G es un conjunto no varío y * es una operación binaria interna. Se le puede asociar su estructura lógica mediante cierto lenguaje $\mathcal{L}$ estructurado de la siguiente manera:

1. Un alfabeto $\mathfrak{U}$, dividido en:

a) Símbolos de aridad cero, $\Omega\_0 = \{(,), e, a, b \cdots)\}$ los cuales, a su vez, se clasifican en símbolos de agrupación: {(;)}, y en letras proposicionales: $A_{t_0} = \{a, e, b\}$

b) Los conectivos de aridad uno, $\Omega_1 = -1, \neg\}$.

c) Los conectivos de aridad dos, $\Omega_2 = \Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, =, *$.

2. Unas reglas de transformación que indican como construir un lenguaje $\mathfrak{U}$ a partir de ciertas $ebfs$.

a) Todo $a, e \in A_{to}$ es una ebf .

b) Si a es una ebf entonces a^{-1} es una ebf .

c) Si $a, b \in A_{to}$ son ebf entonces $(a * b)$ es una ebf.

d) Si $a, b \in A_{to}$ son ebf entonces a = b es una ebf.

e) Ninguna otra cosa formada con ayuda de $\mathfrak{U}$ es una ebf .

3. Intuitivamente hablando puede decirse que el lenguaje $\mathfrak{U}$ solo acepta igualdades como $ebfs$. El sistema axiomático, se define por medio de esquemas:

- A_1: a, b, c ∈ Ato son $ebfs$ entonces $(a * (b * c) = ((a \circ b) * c)$ es un axioma.
- A_2 : Si a es una ebf entonces $a * e = a$ es un axioma.
- A_3 : Si a es una ebf, entonces $e * a = a$ es un axioma.
- A_4 :si a e Ato es una ebf entonces $a^{-1} * a = e$ es un axioma.
- A5 : si a e Ato es una ebf entonces a = a es un axioma.

4. Reglas de inferencia indican:

- R1) Si a, b ∈. A_{t_0} son $ebfs$ entonces de $a = b$ se deduce $b = a$. A_{t_0}
- R2) Si a, b, c ∈.A_{t_0} es una ebf , entonces a = b y b = c se deduce a = c.
- R3) Si a, b, c ∈.A_{t_0}, entonces de la ebf b = c, se puede deducir $(a * b) = a * c$ como $b * a = c * a$.

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS CON DOS ELEMENTOS

Dado el conjunto A_2 = {a, b} definimos sobre la operación + de manera tal que se verifica:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

A partir de donde se puede observar que$\forall\, a, b \in A_2$ se cumple$(a + b) \in A_2$. Inmediatamente surge una pregunta ¿Es posible describir la tabla anterior en términos de algunas propiedades de la operación +? La respuesta es sí, tal como se muestra a continuación

$$:a + a = a, a + b = b + a = a \wedge b + b = a \ .$$

Ahora si nos preguntamos, ¿dadas las propiedades anteriores podemos recuperar la tabla? La respuesta es sí; pero encontramos dos posibilidades: una cuando el elemento identidad es a,

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

Y la otra cuando el elemento identidad es b:

♦	a	b
a	b	a
b	a	b

y reordenando la tabla anterior, se obtiene justamente la tabla:

	b	a
b	a	b
a	b	a

Pero si intercambiamos en esta última tabla los nombres de a y b, obtenemos:

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

Lo que significa, que las dos tablas representan la misma operación con el nombre de los elementos intercambiado.

Por todo lo expuesto se puede deducir con suma facilidad que $(A_2;+)$ es un grupo abeliano.

Otras Representaciones de $(A_2;+)$

Si aplicamos el mecanismo de intercambiar los símbolos de $a, b \in A_2$ y la operación + por otros con la finalidad de asignar un significado diferente, así por ejemplo al intercambiar $A = F = 0; b = V = 1$ se obtiene. las siguientes propuestas:

1. Para la conjunción: $p \wedge q$

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

2. Para la disyunción: $p \vee q$

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

3. Para la implicación interpretada como:$p \rightarrow q = \neg(p \wedge (\neg q))$

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

4. Para el bicondicional: $p \leftrightarrow q$

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

2.2.10 LÓGICA INTUICIONISTA

En el mundo matemático la mayor parte de las veces demostramos argumentos con un puñado de principios lógicos, pero indudablemente descubrimos el camino correcto con ayuda de la intuición.

Henri Poincaré. (1854-1912)

El desarrollo de nuevas ideas matemáticas en el siglo XIX mostro un rápido crecimiento de la abstracción humana. La introducción de la teoría de conjuntos de Cantor, las geometrías no euclidianas, el inicio del álgebra abstracta, son factores que desencadenaron el escepticismo del quehacer matemático, en especial de un grupo notable de matemáticos como Poincaré, Kroeneker, Borel y L.E.J. Brouwer. Este último fue el impulsor del pensamiento intuicionista, el cual abogaba por investigar las construcciones mentales matemáticas como tales, sin hacer referencia alguna acerca de la naturaleza de los objetos construidos, tal como si existen independientemente de nuestro conocimiento.

El intuicionismo sustenta que la matemática, es una actividad mental del pensamiento humano por lo tanto los objetos matemáticos existen en la medida que son pensados. Es decir, estos son construcciones mentales cuyas propiedades también son definidas por medio de construcciones mentales. Esto plantea una diferencia sustancial con la lógica en cuanto a la consideración del infinito actual y la ontología de los objetos matemáticos. La lógica intuicionista difiere de la clásica por la exclusión de los siguientes principios:

- El concepto de verdad se sustituye por el concepto de prueba (demostración) constructiva (o procedimiento constructivo).
- No se cumple el principio de la doble negación: $\neg\neg p \rightarrow p$.
- No se cumple el principio del tercero excluido: $\neg p \vee p$.

PRUEBA CONSTRUCTIVA

Una prueba constructiva es la demostración de la existencia de cierto objeto matemático a través de su construcción. Así, una prueba constructiva debe proveer un algoritmo para obtener el objeto en cuestión.

2.2.10.1. ¿POR QUÉ EL RECHAZO DEL TERCERO EXCLUIDO?

Según (Dummett, 1974), la ley del tercero excluido no es compatible con el intuicionismo porque una prueba del tipo p v q es una prueba o de p o de q y por lo tanto una prueba de $\neg$p V p significa la existencia de la prueba de p o de la prueba de $\neg$p ya que podría suceder que algunas proposiciones no tengan prueba de su afirmación o negación.

2.2.10.2 ¿POR QUÉ EL RECHAZO A LA DOBLE NEGACIÓN?

Según (Dummett, 1974), la ley de la doble negación no es compatible con el intuicionismo porque si se tiene una prueba de $\neg\neg$p nunca se tendrá una prueba de $\neg$p, es decir, una demostración de que nunca se tendrá una prueba de que p nunca sería probado.

2.2.10.3 LA VERDAD INTUICIONISTA

Según (Manuel, 2008), la mención de verdad de una proposición, en lógica intuicionista, es apenas una abreviación lingüística del hecho de que una prueba para esa proposición está disponible.

2.2.10.4 FORMALIZACIÓN DE LA LÓGICA INTUICIONISTA

La formalización de la lógica intuicionista fue inicialmente motivada por la explicación informal de Brouwer-Heyting-Kolmogorov sobre la verdad intuicionista y esta es obtenida traduciendo la lógica proposicional con la eliminación de algunos axiomas.

2.2.10.5 SISTEMAS INTUICIONISTAS DE GENTZEN

Gerhard Gentzen en 1934 propuso un sistema formal que se aproximase al modo de raciocinio humano, para ello propone una teoría de la deducción basada en el tratamiento de ciertas reglas de suposiciones, en lugar de la usual formulación axiomática. Como resultado de esta propuesta, Gentzen presenta dos tipos de sistemas formales conocidos como sistemas de Deducción Natural y cálculo de Secuentes.

1. Deducción natural.

Es un sistema deductivo donde no hay ebf axiomáticamente asumidas como válidas, pero si existen reglas de inferencia y para compensar la falta de axiomas, se permite introducir cualquier ebf como una hipótesis, en cualquier fase de la prueba. De esta manera el sistema de deducción natural provee el ambiente apropiado para estudiar la estructura de las pruebas, donde se hace un análisis de la deducción, desde el punto de vista de la capacidad de cada conectivo.

Además, se adoptan los siguientes conectivos lógicos $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow, \wedge, \vee, \perp\}$; donde la constante $\perp$ permite capturar la definición de negación intuicionista.

De otro lado las reglas de inferencia para la lógica intuicionista son proyectadas en un Patrón de reglas de introducción y eliminación tal como son mostrados en el recuadro adjunto.

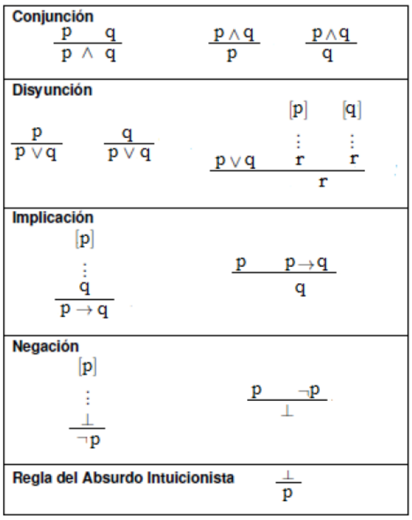


Figura 3: Reglas de Inferencia para la Lógica Intuicionista.

2. Cálculo de secuentes intuicionista.

Gentzen al formalizar el sistema de deducción natural se enfrentó a un problema llamado problema de corte o de eliminación; el cual lo motivo a proponer un nuevo cálculo, conocido como cálculo de secuentes.

Con la finalidad de formular el mencionado calculo Gentzen adopta los siguientes conectivos lógicos {⇒, ⇔, ∧, ∨, ⊥}; y las letras $\{p, q, r, p_1, p_2, p_3 \cdots\}$para designar e, b, f y letras$\{\, \Delta, \Gamma, \Delta\text{^}', \Gamma' \cdots \}$para designar secuencias arbitrarias de e, b, f, s .

El secuente tiene exactamente el mismo significado del esquema:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$$

Presentado en la definición 2.2.1.2 el cual será usualmente representado como $\Gamma \vdash q$ .Las reglas de inferencia para el cálculo de secuentes son mostrados en el recuadro adjunto.

Reglas Estructurales	
Debilitamiento $\dfrac{\Gamma \vdash q}{\Gamma, p \vdash q}$	$\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash p}$
Contracción $\dfrac{\Gamma, p, p \vdash q}{\Gamma, p \vdash q}$	
Permutación $\dfrac{\Gamma, p, q, \Gamma' \vdash r}{\Gamma, q, p, \Gamma' \vdash r}$	
Corte $\dfrac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma', p \vdash q}{\Gamma, \Gamma' \vdash q}$	

Reglas Operacionales	
Conjunción	
$\dfrac{\Gamma, p \vdash r}{\Gamma, p \wedge q \vdash r}$	$\dfrac{\Gamma, q \vdash r}{\Gamma, p \wedge q \vdash r}$
$\dfrac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma' \vdash q}{\Gamma, \Gamma' \vdash p \wedge q}$	
Disyunción	
$\dfrac{\Gamma, p \vdash r \qquad \Gamma, q \vdash r}{\Gamma, p \vee q \vdash r}$	
$\dfrac{\Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash p \vee q}$	$\dfrac{\Gamma \vdash q}{\Gamma \vdash p \vee q}$
Implicación	
$\dfrac{\Gamma \vdash p \qquad \Gamma', q \vdash r}{\Gamma, \Gamma', p \rightarrow q \vdash r}$	$\dfrac{\Gamma, p \vdash q}{\Gamma \vdash p \rightarrow q}$
Negación	
$\dfrac{\Gamma \vdash p}{\Gamma, \neg p \vdash}$	$\dfrac{\Gamma, \quad \vdash p}{\Gamma \vdash \neg p}$

Figura 4: *Reglas para el Cálculo de Secuentes de la Lógica Intuicionista*.

2.2.10.6. LA TEORÍA DE CATEGORÍAS Y LOS SECUENTES DE GENTZEN

Lambek, J (1986), en su artículo titulado Deductive Systems and Categories III, demostró la correspondencia de ciertas categorías y ciertos sistemas deductivos, donde se considera una relación de equivalencia entre pruebas. Para tal fin hizo corresponder a los objetos de cierta categoría con $ebfs$ y los morfismos con las pruebas. Por lo tanto, para Lambek, la distinción entre lo categórico, lo algebraico y lo lógica es lo mismo, puesto que en el álgebra se presta atención a las operaciones heterogéneas, y en la lógica se preste atención a la igualdad entre deducciones.

Si reescribiremos la identidad y la composición entre morfismos de categoría C como.

$$\frac{\underline{A \in Ob(C)}}{id_A : A \to A \text{ en } C} \qquad\qquad \frac{\underline{f : A \to B,\ g : B \to C \text{ en } C}}{f;g : A \to C \text{ en } C},$$

Entonces las ecuaciones que ellos satisfacen se representan por:

$$\frac{f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D \ en\ \mathcal{C}}{f;(g;h) = (f;g);h} \qquad \frac{f : A \to B \ en\ \mathcal{C}}{id_A; f = f} \qquad \frac{f : A \to B \ en\ \mathcal{C}}{f; id_B = f}$$

De otro lado; si el objeto final de la definición 4.2.3 es caracterizado por 1 ∈ C, entonces se tiene:

$$\frac{}{1 \in Ob(\mathcal{C})} \qquad \frac{A \in Ob(\mathcal{C})}{\langle\rangle_A : A \to 1 \ en\ \mathcal{C}} \qquad \frac{f : A \to 1 \ en\ \mathcal{C}}{f = \langle\rangle_A}.$$

En esa línea de razonamiento, si escribimos para todo par A, B ∈ obj(C) el producto binario, definido en lema (2,2,5) por:

$$\frac{A, B \in Ob(\mathcal{C})}{A \times B \in Ob(\mathcal{C})} \qquad \frac{A, B \in Ob(\mathcal{C})}{\pi_{A,B} : A \times B \to A \ en\ \mathcal{C}} \qquad \frac{A, B \in Ob(\mathcal{C})}{\pi'_{A,B} : A \times B \to B \ en\ \mathcal{C}}.$$

Para cualesquiera:

$$\frac{f : C \to A,\ g : C \to B \ en\ \mathcal{C}}{\langle f, g\rangle : C \to A \times B \ en\ \mathcal{C}}$$

Se concluye:

$$\frac{f : C \to A,\ g : C \to B \ en\ \mathcal{C}}{\langle f, g\rangle; \pi_{A,B} = f} \qquad \frac{f : C \to A,\ g : C \to B \ en\ \mathcal{C}}{\langle f, g\rangle; \pi'_{A,B} = g}.$$

Finalmente, por todo lo expuesto anteriormente la unicidad del morfismo inducido por la propiedad universal del producto satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{h : C \to A \times B \ en\ \mathcal{C}}{\langle h; \pi_{A,B},\ h; \pi'_{A,B}\rangle = h}.$$

Luego, si establecemos las siguientes relaciones en la terminología y la notación,

$$\begin{array}{rcl} \text{objeto} & \longmapsto & \text{fórmula} \\ \text{morfismo} & \longmapsto & \text{secuente} \\ f : A \to B & \longmapsto & f : A \vdash B \\ A \times B & \longmapsto & A \wedge B \\ 1 & \longmapsto & \perp. \end{array}$$

Entonces, en toda categoría C es posible definir el conjunto de proposiciones categóricas por For(C). Luego si en ella definimos las dos reglas:

$$\frac{}{\top \in For(\mathcal{C})} \qquad \frac{A, B \in For(\mathcal{C})}{A \wedge B \in For(\mathcal{C})}$$

Entonces, por Lema 2,.2.6 se afirma que existe una única fórmula constante ⊥∈For $(\mathcal{C})$ Además es evidente que For(C) es cerrada bajo la operación binaria ∧.

Si en las siguientes reglas no consideramos el nombre del Secuente, como por ejemplo para cada morfismo $F: A \vdash B$ y nos quedamos sólo con representación $fA \vdash B$, entonces se deduce un cálculo de secuentes para la lógica intuicionista proposicional cuya única conectiva es la conjunción, tal como se puede apreciar a continuación:

$$\frac{A \in For(\mathcal{C})}{id_A : A \vdash A \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{A \in For(\mathcal{C})}{\langle\rangle_A : A \vdash \top \; \boldsymbol{en} \; \boldsymbol{\mathcal{C}}}$$

$$\frac{f : A \vdash B,\; g : B \vdash C \; en \; \mathcal{C}}{f;g : A \vdash C \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{f : C \vdash A,\; g : \boldsymbol{C} \vdash \boldsymbol{B} \; \boldsymbol{en} \; \boldsymbol{\mathcal{C}}}{\langle f, g\rangle : C \vdash \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \; \boldsymbol{en} \; \boldsymbol{\mathcal{C}}}$$

$$\frac{A, B \in For(\mathcal{C})}{\pi_{A,B} : A \wedge B \vdash A \; en \; \mathcal{C}} \qquad \frac{A, B \in \boldsymbol{For}(\boldsymbol{\mathcal{C}})}{\pi'_{A,B} : A \wedge B \vdash \boldsymbol{B} \; \boldsymbol{en} \; \boldsymbol{\mathcal{C}}},$$

La novedad de esta propuesta es la siguiente. Al tener los secuentes la forma f: A ├ B, con un nombre especifico f estas reglas proporcionan un lenguaje de pruebas, que se completa al introducir las siguientes ecuaciones:

$$\frac{f : A \vdash B \; en \; \mathcal{C}}{id_A ; f = f} \qquad \frac{f : A \vdash B \; en \; \mathcal{C}}{f ; id_B = f} \qquad \frac{f : A \vdash 1 \; en \; \mathcal{C}}{f = \langle\rangle_A}$$

$$\frac{f : C \vdash A, \; g : C \vdash B \; en \; \mathcal{C}}{\langle f, g \rangle ; \pi_{A,B} = f} \qquad \frac{f : C \vdash A, \; g : C \vdash B \; en \; \mathcal{C}}{\langle f, g \rangle ; \pi'_{A,B} = g}$$

$$\frac{f : A \vdash B, \; g : B \vdash C, \; h : C \vdash D \; en \; \mathcal{C}}{f ; (g ; h) = (f ; g) ; h} \qquad \frac{h : C \vdash A \times B \; en \; \mathcal{C}}{\langle h ; \pi_{A,B} \, , \, h ; \pi'_{A,B} \rangle = h}.$$

2.3 DEFINICIÓN DE TERMINOS

1. Una **CATEGORÍA** es una estructura algebraica que consta de una colección de *objetos*, conectados unos con otros mediante flechas tales que se cumplen las siguientes propiedades básicas: las flechas se pueden componer unas con otras de manera asociativa, y para cada objeto existe una flecha que se comporta como un elemento neutro bajo la composición. En otros términos, una **categoría $\mathfrak{C}$** consta de

- una clase $ObJ(\mathfrak{C})$ de **objetos**
- para cada par de objetos *A*, *B* en $ObJ(C)$ conjunto **C**(*A*,*B*) de **flechas** o **morfismos** de *A* a *B*.
- para cada terna de objetos *A*, *B*, *C* de **C** una función $\circ$:**C**(*A*,*B*)×**C**(*B*, *C*)→**C**(*A*,*C*) donde $\circ(f,g)$ se denota $g \circ f$.

Además, los siguientes axiomas deben ser ciertos:

- (ASICIATIVIDAD) para cualquier terna de flechas *f*, *g*, *h* se cumple que $h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$, si es que estas composiciones están definidas.
- (IDENTIDAD)) para todo objeto *A* en $ObJ(C)$ existe una flecha en **C**(*A*, *A*) comúnmente denotada 1_A tal que para toda flecha *f* en **C**(*A*;*B*) $f=1_B \circ f$ y $f=f \circ 1_A$.

De estos axiomas se puede deducir fácilmente que existe una única flecha identidad para cada objeto.

2. FUNTOR.

Dados dos categorías $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ con $\mathcal{F}: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ decimos que $\mathcal{F}$, es: :

Funtor covariante si:

1), $\forall A \in Obj(\mathfrak{B})$, tenemos que $\mathcal{F}(A) \in Obj(\mathfrak{C})$.

2), $\forall\ X, Y \in Obj(\mathfrak{B})$, $\forall g \in mor_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ tenemos que $\mathcal{F}(Y) \in Mor_{\mathfrak{C}}(\mathcal{F}(X); \mathcal{F}(Y)$:

a), $\forall A \in Obj(\mathfrak{B})$, tenemos que $\mathcal{F}(I_A) = I_{\mathcal{F}(A)}$.

b), $\forall X, Y, Z \in Obj(\mathfrak{B})$,$f \in Mor_B(X; Y) \forall g \in Mor_{\mathfrak{C}}(Y; Z)$

$\mathcal{F}(g \circ Af) = \mathcal{F}(g) \circ \mathfrak{B}\mathcal{F}(f)$

3. COMPOSICIÓN DE FUNTORES.

. Dados tres categorías .$\mathfrak{B}, \mathfrak{C}. \mathfrak{D}$, y dos funtores covariantes $\mathcal{F}: \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ y $\mathcal{G}: \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, la composición del funtor covariante $\mathcal{G}\mathcal{F}; \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ tal que:

- $\forall X \in Obj(\mathfrak{B})$; $\mathcal{G}\mathcal{F}(X) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(X))$,
- $\forall f \in mor_{\mathfrak{B}},$; $\mathcal{G}\mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$,

4. MORFISMO.

En matemáticas La teoría de categorías trata de forma abstracta con las estructuras matemáticas y sus relaciones. Una categoría se da a partir de dos tipos de datos: una clase de objetos y, para cada par de objetos X y Y, un conjunto de morfismos desde X a Y. Los morfismos son usualmente representados como flechas entre esos objetos. Representan un avance muy importante en el desarrollo de las Matemáticas, principalmente en el tratamiento de las estructuras algebraicas.

Sean S y T dos estructuras algebraicas análogas (por decir anillos), en tal caso diremos que la aplicación f de S en T es un **morfismo** si preserva las operaciones.

Si solamente hay una operación $< S, º >\ y\ < T, * >$ entonces se cumple:

para x, y de S: $f(xoy)\ =\ f(x) * g(y)$

Algunos ejemplos de morfismos son homomorfismos de las categorías estudiadas en álgebra universal (tales como los de grupos, anillos, etc.), continuas entre espacios topológicos elementos de un mioide cuando es pensado como categoría, caminos en espacio topológico (lo que engendra un grupoide), funtores entre categoría, y muchos otros.

En matemáticas para morfismo se define generalmente como una abstracción de un proceso que transforma una estructura abstracta en otro retener algunas de las características "estructurales" de la primera. Cabe señalar que un morfismo no excluye una estructura en sí misma. Los ejemplos más tangibles y útiles de morfismos son aquellos en los que el proceso se expresa con una función o aplicación que transforma un soporte conjunto de una primera estructura algebraica en el set de una segunda estructura de soporte o una parte del mismo que retiene ciertas características estructurales. Más concretamente considerar una estructura algebraica S caracteriza por algunas operaciones finitistas: una aplicación que transforma S en una estructura de la misma especie y mantiene la forma de las expresiones se dice homomorfismo entre las dos estructuras. Morfismos muy concretos son los que afectan a estructuras discretas tangiblemente construibles: Fundamental entre estos son los morfismos de gráficas, aplicaciones que mantienen las relaciones de adyacencia.

5. DEMOSTRACIÓN-

En matemáticas, una demostración es un argumento deductivo regido por las leyes deductivas de la lógica, el mecanismo consiste en usar otras afirmaciones previamente verificadas dentro de ciertos contextos matemáticos donde argumentos primitivos llamados axiomas validan su veracidad y permiten las licencias del razonamiento.

6. LENGUAJE DE PRIMER ORDEN.

Es un sistema formal diseñado para estudiar la inferencia en los lenguajes formales con cuantificadores que alcanzan solo a variables de individuo, y con predicados y funciones cuyos argumentos son solo constantes o variables de individuo.

7. SECUENTE

Un Secuente de un Prolenguaje P es un triplete $(X, \vdash, Y)$ formado por dos secuencias finitas de fórmulas de P, X e Y, y un signo metalingüístico, $\vdash$, llamado separador de Secuente.

CÁLCULO DE SECUENTES

Es un estilo de argumentación lógica donde cada línea de la demostración es una tautología condicional llamada Secuente. Los secuentes son teoremas condicionales en un Lenguaje de primer orden. Por lo tanto, estudiar la validez del razonamiento para verificar los secuentes es un proceso que no solo involucra las leyes clásicas de la lógica, pues se busca la validez de su propi esencia como resultado de la construcción mental de objetos dentro de contextos racionales.

8. PRUEBA CONSTRUCTIVA

En opinión de Quispe, M. (2019), una prueba constructiva es la demostración de la existencia de cierto objeto matemático a través de su construcción. Por lo tanto, una prueba constructiva debe proveer un algoritmo para obtener el objeto en cuestión

2.4. FORMULACIÓN DE LAS HIPOTESIS

2.4.1 HIPOTESIS GENERAL

El cálculo de secuentes de la lógica intuicionista es caracterizado con ayuda de la teoría de categorías.

2.4.2 HIPÓTESIS ESPECÍFICOS

- **HE 01**. Los fundamentos de la teoría de categorías son susceptibles a ser estudiados desde el dominio de la lógica intuicionista.
- **HE 02** La lógica intuicionista se interpreta en el plano categórico.

2.5 OPERACIONALIZACIÓN DE VARIABLES

Dado que la investigación es teórica no tenemos variable dependiente ni independiente, así como no hay indicadores.

CAPITULO III.

METODOLOGÍA

3.1 DISEÑO METODOLÓGICO

Esta investigación se desarrolla a partir de un estudio de caso, aplicado en el ámbito de la lógica intuicionista, donde los fundamentos de la teoría de categorías son las unidades de análisis, pues se pretende construir un modelo categórico para interpretar los fundamentos del cálculo de secuentes de la lógica intuicionista, para tal fin utilizaremos el método de Síntesis o Sintético.

3.1.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica.

3.1.2 NIVEL DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo a la naturaleza del estudio de la investigación, reúne por su nivel las características de un estudio de nivel exploratorio.

3.1.3 DISEÑO

Por ser un tema de carácter teórico, el diseño de la investigación es de carácter básicamente explicativo basada en la discusión y el análisis crítico.

3.1.4 ENFOQUE

De acuerdo a la naturaleza del diseño de la investigación, su enfoque es cualitativo.

3.2 POBLACIÓN Y MUESTRA

Por ser una tesis netamente teórica, no hay universo, ni población ni muestra**.**

3.3 TÉCNICA DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Con la finalidad de lograr los objetivos de nuestra investigación se procederá a recopilar y extraer información bibliográfica adecuada

3.4 INSTRUMENTOS.

Los instrumentos para desarrollar la tesis son los libros revistas y manuscritos relativo a la teoría del tema.

3.5 TÉCNICAS PARA EL PROCESAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Análisis, procedimientos algebraicos y demostraciones.

CAPÍTULO IV:

RESULTADOS

4.1 RESULTADOS

Aplicando la teoría de categorías se logró interpretar el cálculo de secuentes. En los resultados de la investigación se desarrolló una interpretación algebraica de los fundamentos de la Lógica Intuicionista considerando para tal fin la interrelación entre teoría de categorías, Lógica algebraica y Lógica Intuicionista

CAPITULO V:

DISCUSIÓN CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES Y SUGERENCIAS.

5.1 DISCUSIÓN.

La discusión en el desarrollo de la tesis consiste en el estudio y análisis de la teoría de categorías con el uso de los funtores, análisis de lógica intuicionista, arribando a una interpretación categórica para el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista.

5.2 CONCLUSIONES.

Primera. - Se ha modelado categóricamente el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista y luego se ha interpretado dentro del marco teórico de la teoría de categorías. El cálculo de secuentes es en realidad un estilo de argumento lógico donde cada línea de la demostración es una expresión condicional bien formada, verdadera para cualquier asignación de valores de verdad, por ese motivo esta propuesta se basa en un cálculo de secuentes intuicionista con múltiples conclusiones.

Segunda. - Se ha demostrado que se puede algebrizar, con ayuda de la teoría de categorías, los principios lógicos de las pruebas formales constructivistas.

5.3 RECOMENDACIONES

Se recomienda continuar con este estudio a nivel de pregrado y post grado, dando los conocimientos en las universidades dentro de la Facultad de ciencias y otras disciplinas científicas

5.4 SUGERENCIAS.

Las sugerencias de los trabajos futuros son las siguientes:

a) Por ser el cálculo de secuentes intuicionistas una metodología de pruebas constructivas, un trabajo futuro pendiente de nuestra propuesta sería la definición del procedimiento de normalización de cómo se relacionan los objetos, los morfismos y las construcciones categóricas con el caculo de secuentes.
b) Extender los principios del cálculo de secuentes de la lógica intuicionista con ayuda de las demás construcciones categóricas.

c) Implementar un marco interpretativo categórico para la lógica intuicionista.

Extender nuestra propuesta de interpretación categórica al estudio de los N-Grafos propuesta por Alves, G. V., et al. (2011) en el articular, a thorough cycle treatment, normalization and sub formula property. Fundamenta Informaticae, 106(2-4), 119-

1APÉNDICE A: MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	METODOLOGÍA
PROBLEMA GENERAL ¿Es posible interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista con ayuda de la teoría de categorías? **Problemas Específicos** 1. ¿De qué manera la teoría de categorías permite interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista? 2. ¿Cómo las categorías y los funtores ayudan a interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista?	**OBJETIVO GENERAL** 1. Establecer la influencia de la teoría de categorías y los funtores en la interpretación del cálculo de secuentes se la lógica intuicionista **Objetivos Específicos** 1. Determinar como la teoría de categorías es aplicable para Interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista. 2. Indagar como los funtores, los morfismos y la teoría de categorías son aplicables para interpretar el cálculo de secuentes de la lógica intuicionista.	**HIPOTESIS GENERAL** El cálculo de secuentes de la lógica intuicionista es caracterizada con ayuda de la teoría de categorías **HIPÓTESIS ESPECÍFICOS** **HE 01**. Los fundamentos de la teoría de categorías son susceptibles a ser estudiados desde el dominio de la lógica intuicionista. **HE 02** La lógica intuicionista se interpreta en el plano categórico.	**TIPO DE INVESTIGACIÓN** Por el tipo de la investigación, el presente estudio reúne las condiciones metodológicas de una investigación teórica **ENFOQUE**. De acuerdo a la naturaleza del diseño de la investigación, su enfoque es cualitativo. **POBLACIÓN Y MUESTRA** Por ser una tesis netamente teórica, no hay universo, ni población ni muestra**.** **TÉCNICAS EMPLEADAS**. Recolección y uso de temas necesarios para elaborar la tesis.

CAPITULO VI

FUENTES DE INFORMACIÓN

6.1 Fuentes bibliográficas

Awodey, S. (2010), Category Theory, Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York.

Cerrito, A. (1990), Linear Semantics for Allowed Logic Programs, en: Proc. Síu. Annual lEES Symp. on Logic in Computer Science, Phila- delphia, Pennsylvania, póginas 219—227.

Brouwer, L. (1952), Historical Background, Principies and Methods of Intuitionism», p. 140. Cfr. Brouwers Cambridge lectures on Intuitionism.

Dummett, M. (1974), Intuitionistic mathematics and logic. Mathematical Institute.

Gentzen, G. (1969) Investigations into Logical Deduction. In: SZA- BO, M. E. (Ed.). The Collected Papers of Gerhard Gentzen. Amsterdam: North-Holland, p. 68-213.

Heytíng, A. (1971), Intuitionism. An Introduction, North Holland.

Lambek, J. and P.J. Scott, Introduction to Higher-Order Categorical Logic, Cambridge Uni- versity Press, Cambridge, 1986.

Troelstra, A. (1980), The interplay between Logic and Mathematics: Intuitionism, en AGAZZI, E. (ed), Modern Logic. A Survey, Reidel, Dor- drecht, p. 198.

6.2 Fuentes documentales

Broncano, J. (2018). Construcción de una pro-categoría abeliana. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Ingeniería. Perú. Recuperado de: http://cybertesis.uni.edu.pe/handle/uni/17633

Quispe, M. (2014). Sistema deductivo basado en grafos para la lógica intuicionista. (Tesis de pregrado). Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.

Ehrhard, T. (1988), Une Semantique Calegorique des Types Depen- dants. Applicalion au Calcul des Conslruclions, Tesis doctoral, Universite de Paris VII.