

*Universidad Nacional*

*José Faustino Sánchez Carrión*

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA**



**OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA  
APLICADA**

“ANÁLISIS DEL MÉTODO DE DISPARO LINEAL Y LOS MÉTODOS DE DIFERENCIAS  
FINITAS PARA PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA”

Presentado por:

Bachiller: AYALA LUNA TITA PAOLA

ASESORA

Mg. Jaqueline Jessica Cabello Blanco

**Huacho-Perú**

**2021**



**“ANÁLISIS DEL MÉTODO DE DISPARO LINEAL Y LOS MÉTODOS DE  
DIFERENCIAS FINITAS PARA PROBLEMAS DE VALORES EN LA FRONTERA”**

---

Mg. JAQUELINE JESSICA CABELLO BLANCO  
Asesora

**MIEMBROS DEL JURADO**

---

Dr. BENIGNO WALTER MORENO MANTILLA  
Presidente

---

Mg. JORGE LUIS ROJAS PAZ  
Secretario

---

Ma. ROCÍO DEL CARMEN ROMERO ZULOETA  
Vocal

### **DEDICATORIA**

El presente trabajo está dedicado a Dios quien me ilumina y guía mi camino, a mis padres Usterio Ayala Espinoza y Nelly Luna Blas por su incondicional amor, apoyo y dedicación ya que estuvieron ahí alentándome a seguir adelante.

## **AGRADECIMIENTO**

A la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carraón que me brindó la oportunidad de superación.

A los docentes de la Facultad de Ciencias, por sus conocimientos brindados y sus aportes en la enseñanza superior universitario.

Un agradecimiento especial a la Mg. Jaqueline Jessica Cabello Blanco, por su asesoría y aportes en la elaboración de tesis.

También agradezco a mi familia por su apoyo, gracias a ello hicieron más mis ganas de seguir adelante en mi carrera profesional.

## ÍNDICE

<b>DEDICATORIA</b> .....	3
<b>AGRADECIMIENTO</b> .....	4
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	11
<b>Capítulo I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	12
<b>1.1. Descripción de la Realidad Problemática</b> .....	12
<b>1.2. Formulación Del Problema</b> .....	13
<b>1.2.1 Problema General</b> .....	13
<b>1.2.2 Problemas Específicos</b> .....	13
<b>1.3 Objetivos de la Investigación</b> .....	14
<b>1.3.1 Objetivo General</b> .....	14
<b>1.3.2 Objetivos Específicos</b> .....	14
<b>1.4 Justificación de la Investigación</b> .....	15
<b>1.5 Delimitación del estudio</b> .....	15
<b>1.6 Viabilidad del estudio</b> .....	15
<b>Capitulo II: MARCO TEÓRICO</b> .....	16
<b>2.1 Antecedentes de la Investigación</b> .....	16
<b>2.2 Bases teóricas</b> .....	16
<b>2.3 Definiciones conceptuales</b> .....	25
<b>2.4 Formulación de hipótesis</b> .....	30

2.4.1	Hipótesis General .....	30
2.4.2	Hipótesis Específicas .....	30
<b>Capítulo III: METODOLOGÍA .....</b>		<b>31</b>
3.1.	Diseño Metodológico .....	31
3.1.1.	Tipo.....	31
3.1.2.	Enfoque .....	31
3.2.	Población Y Muestra.....	32
3.3.	Operacionalización de variables e indicadores.....	33
3.4.	Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	33
3.4.1.	Técnica a Emplear. ....	33
3.5.	Técnicas para el Procesamiento de la información. ....	33
<b>Capítulo IV: RESULTADOS.....</b>		<b>34</b>
<b>Capítulo V: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>		<b>46</b>
5.1.	Discusión .....	46
5.2.	Conclusiones .....	46
5.3.	Recomendaciones .....	47
<b>Capítulo VI: FUENTES DE INFORMACIÓN .....</b>		<b>48</b>
6.1.	Fuentes Bibliográficas.....	48
6.2.	Fuentes Electrónicas .....	48
<b>ANEXOS.....</b>		<b>50</b>

### Índice de Tablas

<b>Tabla1</b> Fórmulas de diferencias centradas de orden $O(h^2)$ .....	23
<b>Tabla2</b> Resultados para la deflexión aproximada con el método del disparo lineal. ....	39
<b>Tabla3</b> Resultado del análisis de error cuadrático medio del método del disparo lineal. ....	40
<b>Tabla4</b> Resultados para la deflexión aproximada con el método de diferencias finitas. ....	42
<b>Tabla5</b> Resultado del análisis de error cuadrático medio del método de las diferencias finitas. .	43

## Índice de Figuras

<i>Figura 1.</i> Problema de valor inicial.....	12
<i>Figura 2.</i> Problemas de valores en la frontera. ....	13
<i>Figura 3.</i> Elemento estructural que desplaza bajo una fuerza o carga la cual llamamos deflexión. .....	25
<i>Figura 4.</i> Viga que se denomina elemento lineal que trabaja con la flexión. ....	26
<i>Figura 5.</i> Eje de simetría en el plano y mediante la elasticidad cambia a una curva elástica. ....	26
<i>Figura 6.</i> Capacidad del cuerpo que por si mismo cambian a un estado de reposo.....	27
<i>Figura 7.</i> Objeto que representa alargamiento sin perder su estado natural. ....	27
<i>Figura 8.</i> Intensidad con carga constante entre D y C y variable entre A y C y entre D y B. ....	28
<i>Figura 9.</i> Longitud del segmento de recta comprendida entre dos puntos. ....	29
<i>Figura 10.</i> Longitud de una dirección recorrida por un cuerpo en un tiempo determinado de 1m. .....	29
<i>Figura 11.</i> Diseño.....	31
<i>Figura 12.</i> Deflexión de la viga. ....	34
<i>Figura 13.</i> Figura aproximada con un tamaño de paso $h=6$ .....	45

## RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$ . Dentro de los métodos tenemos a la ecuación diferencial:  $\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l)$ , donde  $w(x)$  es la función de la deflexión y  $l$  es la longitud de la viga,  $q$  es la intensidad de la carga uniforme,  $E$  es el módulo de elasticidad,  $S$  es el esfuerzo en los extremos y  $I$  es el momento central de inercia. Esta ecuación diferencial tiene asociados a dos condiciones de frontera dadas por la suposición de que no ocurre deflexión alguna en los extremos de la viga.  $w(0) = w(l) = 0$ , como problema de valor de frontera tenemos la ecuación diferencial:  $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - 1)$ ,  $0 < x < l$ , con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$ , suponga que la viga es de acero y del tipo  $W10$ , con las siguientes características:  $l = 120 plg$ ,  $q = 100lb/pie$ ,  $E = 3.0 \times 10^7 lb/plg^2$ ,  $S = 1000 lb$  y  $I = 625 plg^4$ . El tipo de investigación fue explicativa, estableciendo la relación causa efecto, mediante la prueba de la hipótesis, el enfoque se esquematiza: ley física - Ecuación diferencial ordinaria-solución numérica. Se obtuvo como resultado, según la tabla 2 y 3 se muestra, que se puede aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$  con los métodos de disparo lineal y diferencia finitas. Por lo que se concluyó que los métodos de disparo lineal y diferencias finitas aproxima la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$ , alcanzando la mayor deflexión a 60 pulgadas de distancia del punto inicial aproximadamente con 0.014 mm. de deflexión, así mismo el método que ofrece menor vulnerabilidad ante el error de redondeo para la aproximación de la deflexión  $w(x)$  de la viga es el método de diferencias finitas dado que al reducir el tamaño de paso a la mitad produce una disminución de error aproximadamente a su cuarta parte, encontrando un ECM de 0.009808989 para el método del disparo lineal y un ECM de 0,0098281 para el método de diferencias finitas.

**Palabras clave:** El método de disparo lineal, los métodos de las diferencias finitas, problemas con valor de frontera, deflexión, ecuaciones diferenciales de segundo orden, discretizar.

## ABSTRACT

The objective of this investigation was to approximate the deflection  $w(x)$  of the beam every 6plg. Within the methods we have the differential equation:  $\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l)$ , where  $w(x)$  is the function of the deflection and  $l$  is the length of the beam,  $q$  is the intensity of the uniform load,  $E$  is the modulus of elasticity,  $S$  is the effort at the ends and  $I$  is the central moment of inertia. This differential equation has two boundary conditions associated with the assumption that no deflection occurs at the ends of the beam.  $w(0) = w(l) = 0$ , as a boundary value problem we have the differential equation:  $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x - 1)$ ,  $0 < x < l$ , with the boundary conditions  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$  suppose the beam is made of steel and of type W10, with the following characteristics:  $l = 120 \text{ plg}$ ,  $q = 100 \text{ lb/plg}$ ,  $E = 3.0 \times 10^7 \text{ lb/plg}^2$ ,  $S = 1000 \text{ lb}$  and  $I = 625 \text{ plg}^4$ . The type of research was explanatory, establishing the cause-effect relationship, through the hypothesis test, the approach is outlined: physical law - Ordinary differential equation-numerical solution. It was obtained as a result, as shown in Table 2 and 3, that the deflection  $w(x)$  of the beam can be approximated every 6plg with finite linear tripping and difference methods. Therefore, it was concluded that the methods of linear firing and finite differences approximate the deflection  $w(x)$  of the beam every 6plg, reaching the greatest deflection 60 inches away from the starting point approximately 0.014 mm. of deflection, also the method that offers less vulnerability to the rounding error for the approximation of the deflection  $w(x)$  of the beam is the method of finite differences since reducing the step size in half produces a decrease of error approximately to its fourth part, finding an ECM of 0.009808989 for the linear firing method and an ECM of 0.0098281 for the finite difference method.

**Keywords:** The method of linear firing, the methods of finite differences, problems with boundary value, deflection, second-order differential equations, discretize.

## INTRODUCCIÒN

El presente estudio consistió en analizar el método de disparo lineal y los métodos de diferencias finitas para problemas de valores en la frontera.

El trabajo de investigación tuvo por objetivo analizar la aproximación de la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$  para lo cual se analizó dos procedimientos generales para obtener su solución: el método de disparo lineal y los métodos de diferencias finitas. Se verificó que no rebasa  $0.2 plg$  el error máximo en el intervalo. Se comparó y analizó la solución analítica exacta con los métodos de disparo lineal y de diferencias finitas. Se construyó un algoritmo y programa de aproximaciones a la solución de problemas de valores en la frontera mediante el método de disparo lineal, usando el método de Runge Kutta de orden  $N = 4$  para resolver los problemas de valor inicial adecuados. Y por último se construyó un algoritmo y programa de aproximaciones a la solución de problemas de valores en la frontera usando los métodos de diferencias finitas de orden  $O(h^2)$ .

Con los hallazgos de esta investigación se podrá sugerir la aproximación de la deflexión de las vigas utilizando programas de aproximación.

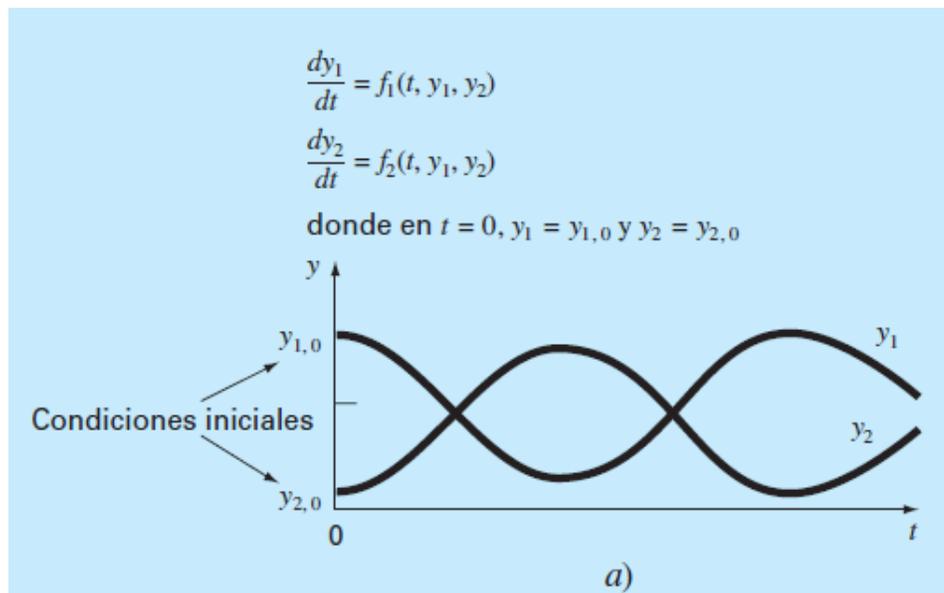
Así mismo servirá para aplicar conocimientos en el área de ingeniería civil en cuanto a métodos numéricos.

Se espera que la investigación sea de mucho interés para los estudiantes de la escuela académica profesional Matemática Aplicada, que sirva como modelo para sus futuros estudios de investigación.

## Capítulo I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

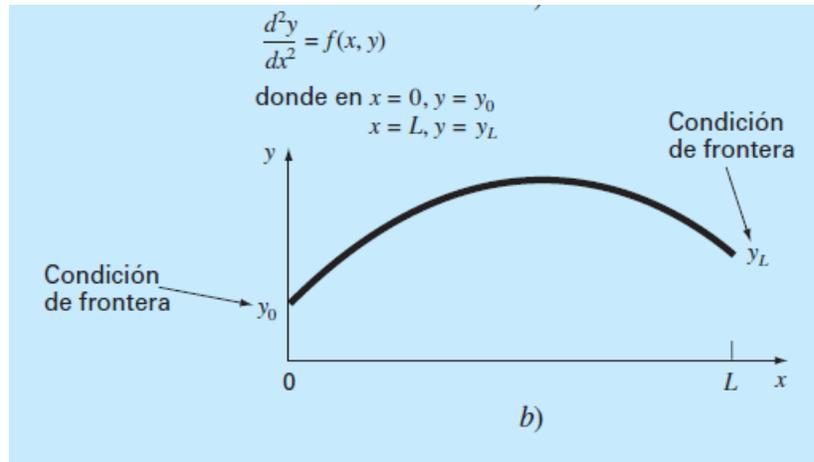
### 1.1. Descripción de la Realidad Problemática

Para una ecuación ordinaria de n-ésimo orden, se requiere n condiciones. Si todas las condiciones se especifican para el mismo valor de la variable independiente, entonces se trata de un *problema de valor inicial* (Figura 1).



**Figura 1.** Problema de valor inicial.

Hay otra aplicación en la cual las condiciones no se conocen para un solo punto, sino más bien, en diferentes valores de la variable independiente. Debido a que estos valores se especifican en los puntos extremos o frontera de un sistema, se les conoce como problemas de valores en la frontera (figura 2). Muchas aplicaciones importantes en ingeniería son de esta clase. Se analizará dos procedimientos generales para obtener su solución: el método de disparo lineal y los métodos de diferencias finitas.



**Figura 2.** Problemas de valores en la frontera.

## 1.2. Formulación Del Problema

### 1.2.1 Problema General

Se considera la deflexión de una viga con los extremos soportados sujetos a una carga uniforme. El problema con valor de frontera que rige esta situación física es:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{El}w + \frac{qx}{2El}(x-1), \quad 0 < x < l$$

Con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$ , suponga que la viga es de acero y del tipo W10, con las siguientes características: longitud  $l = 120 \text{ plg}$ , intensidad de carga uniforme  $q = 100 \text{ lb/plg}$ , módulo de elasticidad  $E = 3.0 \times 10^7 \text{ lb/plg}^2$ , esfuerzo en los extremos  $S = 1000 \text{ lb}$  y momento central de inercia  $I = 625 \text{ plg}^4$ . ¿Se podrá aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6 \text{ plg}$ ?

### 1.2.2 Problemas Específicos

- Aproxime la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6 \text{ plg}$  por los métodos de disparo lineal y de diferencias finitas. ¿Cuál de los dos métodos ofrece menor vulnerabilidad ante el error de redondeo para la aproximación de la deflexión  $w(x)$  de la viga?

### 1.3 Objetivos de la Investigación

#### 1.3.1 Objetivo General

Aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$ .

#### 1.3.2 Objetivos Específicos

- Analizar y aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$  por el método de disparo lineal.
- Analizar y aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$  por los métodos de diferencias finitas.

- La relación real está dada por:

$$w(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + b(x-l)x + c, \quad \text{Donde} \quad :C_1 = 7.7042537 \times 10^4,$$

$$C_2 = 7.9207462 \times 10^4, \quad a = 2.3094010 \times 10^{-4}, \quad b = -4.1666666 \times 10^{-3} \quad \text{y}$$

$$c = -1.5625 \times 10^5 \quad \text{¿no rebasa } 0.2 \text{ plg el error máximo en el intervalo?}$$

- Comparar y analizar la solución analítica exacta con los métodos de disparo lineal y de diferencias finitas.
- Construir un algoritmo y programa de aproximaciones a la solución de problemas de valores en la frontera mediante el método de disparo lineal, usando el método de Runge Kutta de orden  $N = 4$  para resolver los problemas de valor inicial adecuados.
- Construir un algoritmo y programa de aproximaciones a la solución de problemas de valores en la frontera usando los métodos de diferencias finitas de orden  $O(h^2)$ .

#### **1.4 Justificación de la Investigación**

En el ámbito académico esta investigación servirá como aporte en el análisis del uso de los métodos de disparo lineal y de diferencias finitas.

En el ámbito social con los hallazgos de esta investigación se podrá sugerir la aproximación de la deflexión de las vigas utilizando programas de aproximación.

Así mismo en lo personal, servirá para aplicar conocimientos en el área de ingeniería civil en cuanto a métodos numéricos. Por lo que a partir de estos aportes servirán para tesis futuras, aplicaciones y cátedra.

#### **1.5 Delimitación del estudio**

El presente estudio pretendió analizar el método de disparo lineal y los métodos de diferencias finitas para problemas de valores en la frontera. El estudio se realizó en los ambientes de la Universidad Nacional José Faustino Sánchez Carrión y fuera de ellas utilizando bibliografía y software para las aproximaciones.

#### **1.6 Viabilidad del estudio**

El estudio fue viable, dado que se necesitó bibliografía, información y computadora que está al alcance del investigador.

## Capítulo II: MARCO TEÓRICO

### 2.1 Antecedentes de la Investigación

Esta Investigación no cuenta con antecedentes regionales, nacionales e internacionales.

### 2.2 Bases teóricas

#### 1. Métodos de Runge-Kutta.

El método de cuarto orden Runge-Kutta (que llamaremos RK4) simula la precisión del método de la serie de Taylor de orden  $N = 4$  y consiste en calcular la aproximación  $y_{k+1}$  de la siguiente manera:

$$(1) \quad y_{k+1} = y_k + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4$$

donde  $k_1, k_2, k_3$  y  $k_4$  son de la forma

$$(2) \quad \begin{aligned} k_1 &= hf(t_k, y_k). \\ k_2 &= hf(t_k + a_1h, y_k + b_1k_1). \\ k_3 &= hf(t_k + a_2h, y_k + b_2k_1 + b_3k_2). \\ k_4 &= hf(t_k + a_3h, y_k + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3). \end{aligned}$$

Runger-Kutta fueron capaces de obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(3) \quad \begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 + b_3 &= a_2, \\ b_4 + b_5 + b_6 &= a_3, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1, \\ w_2a_1 + w_3a_2 + w_4a_3 &= \frac{1}{2}, \\ w_2a_1^2 + w_3a_2^2 + w_4a_3^2 &= \frac{1}{3}, \\ w_2a_1^3 + w_3a_2^3 + w_4a_3^3 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$$w_3 a_1 b_3 + w_4 (a_1 b_5 + a_2 b_6) = \frac{1}{6}.$$

$$w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3 (a_1 b_5 a_2 b_6) = \frac{1}{8}.$$

$$w_3 a_1^2 b_3 + w_4 (a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6) = \frac{1}{12},$$

$$w_4 a_1 b_3 b_6 = \frac{1}{24}.$$

Este sistema tiene 11 ecuaciones con 13 incògnitas, así que debemos añadir dos condicionales para resolver. La elección más útil resulta ser

$$(4) \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad y \quad b_2 = 0.$$

Entonces los valores de la solución para las demás variables son

$$a_2 = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = 1,$$

$$b_1 = \frac{1}{2},$$

$$b_3 = \frac{1}{2},$$

$$(5) \quad b_4 = 0,$$

$$b_5 = 0,$$

$$b_6 = 1,$$

$$w_1 = \frac{1}{6},$$

$$w_2 = \frac{1}{3},$$

$$w_3 = \frac{1}{3},$$

$$w_4 = \frac{1}{6}.$$

Sustituyamos en las expresiones (1) y (2) los valores dados en (4) y (5), obtenemos la fórmula para el método de Runge-Kutta de orden  $N = 4$  estándar: A partir del punto de inicial  $(t_0, y_0)$  se genera la sucesión de aproximación usando la fórmula recursiva

$$(6) \quad y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6}$$

Donde

$$(7) \quad \begin{aligned} f_1 &= f(t_k, y_k), \\ f_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_1\right), \\ f_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f_2\right), \\ f_4 &= f(t_k + h, y_k + hf_3). \end{aligned}$$

## 2. Sistema de ecuaciones diferenciales.

Para ilustrar los conceptos, consideremos el problema de valor inicial

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y) \\ \text{Con } \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

Una solución del sistema (1) es un par de funciones derivables  $x(t)$  e  $y(t)$  tales que cuando  $t$ ,  $x(t)$  e  $y(t)$  se sustituye en  $f(t, x, y)$  y  $g(t, x, y)$ , el resultado es igual a la derivada  $x'(t)$  e  $y'(t)$ , respectivamente; es decir:

$$\begin{aligned}
 &x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\
 (2) \quad &\text{Con } \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \\
 &y'(t) = g(t, x(t), y(t))
 \end{aligned}$$

### 2.1. Ecuaciones diferenciales de orden superior.

Las ecuaciones diferenciales de orden superior son las que involucran las derivadas de orden superior  $x''(t), x'''(t)$  y así sucesivamente. Estas ecuaciones aparecen en modelos matemáticos de problemas de física y la ingeniería.

Por ejemplo,

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = g(t)$$

Representa un sistema mecánico en el que un muelle, cuya constante de recuperación es  $k$  y que está dado a una masa  $m$ , ha sido separado de su posición de equilibrio, a la que tiende a volver. Se supone que la amortiguación debido al rozamiento es proporcional a la velocidad, que existe una fuerza externa  $g(t)$  y, como ocurre con frecuencia, que se conocen la posición  $x(t_0)$  y la velocidad  $x'(t_0)$  en un cierto instante  $t_0$ .

Despejando la derivada segunda, podemos escribir el problema de valor inicial de segundo orden como

$$(3) \quad x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \quad \text{Con } x(t_0) = x_0 \quad \text{y} \quad x'(t_0) = y_0$$

Esta ecuación de segundo orden puede reformularse como un sistema con dos ecuaciones de primer orden usando la sustitución

$$(4) \quad x'(t) = y(t)$$

entonces  $x''(t) = y'(t)$  y la ecuación diferencial (3) se convierte en el sistema

$$(5) \quad \frac{dx}{dt} = y$$

Con  $\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, y)$$

Al resolver la ecuación (5) con un método numérico como el de **Runge-Kutta**, se generan dos sucesiones  $\{x_k\}$  e  $\{y_k\}$ , siendo  $\{x_k\}$  la solución de (3).

### 3. Problemas de Contorno.

Otro tipo de ecuaciones diferenciales son de la forma

$$(1) \quad x'' = f(t, x, x') \quad \text{para} \quad a \leq t \leq b,$$

con la condición de contorno (o frontera)

$$(2) \quad x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta.$$

Esto es lo que se conoce como **problema de contorno** o **problema de valores en la frontera**.

Hay que comprobar que se cumplan las condiciones, recogidas en el siguiente teorema, que garantizan que un problema de contorno tiene solución antes de emplear un método numérico; si no se hace, puede que obtengamos resultados absurdos.

**Teorema 1(Problema de contorno).** Supongamos que  $f(t, x, y)$  es continua en la región  $R = \{(t, x, y) : a \leq t \leq b, -\infty < x < \infty, -\infty < y' < \infty\}$  y que las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(t, x, y)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(t, x, y)$  son continuas en R. Si:

$$(3) \quad f_y(t, x, y) > 0 \text{ Para todo } (t, x, y) \in R$$

y existe una constante  $M > 0$  tal que

$$(4) \quad |f_y(t, x, y)| \leq M, \text{ para todo } (t, x, y) \in R,$$

entonces el problema de contorno

$$(5) \quad x'' = f(t, x, x') \quad \text{con } x(a) = \alpha \quad \text{y } x(b) = \beta$$

tiene una solución única  $x = x(t)$  en  $a \leq t \leq b$ .

Hemos usado la notación  $y = x'(t)$  para distinguir la tercera variable de la función  $f(t, x, x')$ . Merece la pena destacar el caso especial de las ecuaciones diferenciales lineales.

**Corolario 1 (Problema de contorno Lineales).** Supongamos que la función  $f$  del Teorema 1 es de la forma:

$$f(t, x, y) = p(t)y + q(t)x + r(t)$$

y que  $f$  y sus derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x} = q(t)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = p(t)$  son continuas en  $R$  (lo que garantiza,

en particular, que  $|p(t)| \leq M = \max_{a \leq t \leq b} \{|p(t)|\}$ ). Si:

$$(6) \quad q(t) > 0 \quad \text{para todo } t \in [a, b]$$

entonces el **Problema de contorno Lineal**

$$(7) \quad x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t) \quad \text{con } x(a) = \alpha \quad \text{y } x(b) = \beta$$

tiene solución única  $x = x(t)$  en  $a \leq t \leq b$ .

### 3.1. El Método del Disparo Lineal.

Se requieren unas condiciones que garanticen la existencia de una solución para dicha función en la frontera y un valor inicial en ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Supongamos que  $u(t)$  es la solución única del problema del valor inicial:

$$(8) \quad u'' = p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t) \quad \text{con } u(a) = \alpha \quad \text{y } u'(a) = 0.$$

Supongamos, además, que  $v(t)$  es la solución única del problema de valor inicial:

$$(9) \quad v'' = p(t)v'(t) + q(t)v(t) \quad \text{con} \quad v(a) = 0 \quad \text{y} \quad v'(a) = 1.$$

Entonces la combinación Lineal será la siguiente:

$$(10) \quad x(t) = u(t) + Cv(t)$$

es una solución de  $x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t)$ , como podemos comprobar haciendo los cálculos

$$\begin{aligned} (11) \quad x'' &= u'' + v'' \\ &= p(t)u'(t) + q(t)u(t) + r(t) + p(t)Cv'(t) + q(t)Cv(t) \\ &= p(t)(u'(t) + Cv'(t)) + q(t)(u(t) + Cv(t)) + r(t) \\ &= p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t). \end{aligned}$$

La solución  $x(t)$  de la ecuación (8), toma los siguientes valores en la frontera del intervalo:

$$(12) \quad \begin{aligned} x(a) &= u(a) + Cv(a) = \alpha + 0 = \alpha, \\ x(b) &= u(b) + Cv. \end{aligned}$$

Si llegamos a imponer la condición de contorno  $x(b) = \beta$  en (11), tendremos  $C = \frac{(\beta - u(b))}{v(b)}$ . En consecuencia, si  $v(b) \neq 0$ , entonces la única solución del problema de

contorno o problema de valor frontera de la ecuación (7) es la siguiente:

$$(13) \quad x(t) = u(t) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}v(t).$$

### 3.2. Método de las diferencias finitas.

El Método de las Diferencias Finitas se basa a la idea de aproximar las derivadas que aparecen para resolver problemas de contorno de segundo orden, utilizando las fórmulas de las diferencias. Tendremos en cuenta la ecuación lineal:

$$(1) \quad x'' = p(t)x'(t) + q(t)x(t) + r(t)$$

en  $[a, b]$  con  $x(a) = \alpha$  y  $x(b) = \beta$ , Hagamos una Partición de  $[a, b]$  usando nodos  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ , siendo  $h = (b - a)/N$  y  $t_j = a + jh$  para  $j = 0, 1, \dots, N$ .

Usaremos las fórmulas de diferencias centradas, dadas en la tabla 1:

**Tabla1**

Fórmulas de diferencias centradas de orden  $O(h^2)$ .

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f^3(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$f^4(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h}$$

$$(2) \quad x'(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - x(t_{j-1}))}{2h} + O(h^2)$$

y

$$(3) \quad x''(t_j) = \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1}))}{h^2} + O(h^2),$$

ahora remplazaremos cada término  $x(t_j)$  del miembro derecho de las fórmulas (2) y (3) por  $x_j$  y sustituir el resultado en la ecuación (1), lo que nos da la relación

$$(4) \quad \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} + O(h^2) = p(t_j) \left( \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + O(h^2) \right) + q(t_j)x_j + r(t_j).$$

Eliminaremos los términos de orden  $O(h^2)$  en (4). Introduciendo la siguiente notación  $p_j = p(t_j)$ ,  $q_j = q(t_j)$  y  $r_j = r(t_j)$ , Obtendremos la ecuación en diferencia:

$$(5) \quad \frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = p_j \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2h} + q_j x_j + r_j,$$

donde se usa para calcular aproximaciones numéricas a la solución de la ecuación diferencial (1).

Para ello, multiplicaremos por  $h^2$  a cada miembro de (5) y agruparemos aquellos términos que contienen las incógnitas  $x_{j-1}$ ,  $x_j$  y  $x_{j+1}$  y los adaptaremos como un sistema de ecuaciones lineales:

$$(4) \quad \left( \frac{-h}{2} p_j - 1 \right) x_{j-1} + (2 + h^2 q_j) x_j + \left( \frac{h}{2} p_j - 1 \right) x_{j+1} = -h^2 r_j$$

para  $j=1, 2, \dots, N-1$ , siendo  $x_0 = \alpha$  y  $x_N = \beta$ .

En la ecuación (6) es un sistema tridiagonal de  $N - 1$  ecuaciones con otras tantas incógnitas, lo escribiremos usando la notación matricial donde se vera claramente:

$$\begin{bmatrix} 2 + h^2 q_1 & \frac{h}{2} p_1 - 1 & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-h}{2} p_2 - 1 & 2 + h^2 q_2 & \frac{h}{2} p_2 - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{-h}{2} p_j - 1 & 2 + h^2 q_j & \frac{h}{2} p_j - 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{-h}{2} p_{N-2} - 1 & 2 + h^2 q_{N-2} & \frac{h}{2} p_{N-2} - 1 \\ \dots & \dots & \dots & \frac{-h}{2} p_{N-1} - 1 & 2 + h^2 q_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2 r_1 + e_0 \\ -h^2 r_2 \\ \dots \\ -h^2 r_j \\ \dots \\ -h^2 r_{N-2} \\ -h^2 r_{N-1} + e_N \end{bmatrix}$$

Siendo:

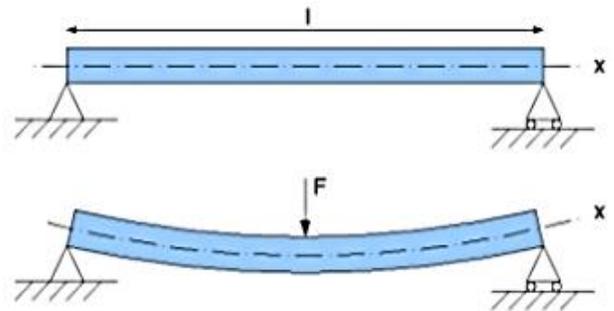
$$e_0 = \left(\frac{h}{2} p_1 + 1\right) \alpha \quad e_N = \left(\frac{-h}{2} p_{N-1} + 1\right) \beta.$$

Cuando se realizan los cálculos con un tamaño de paso  $h$ , la aproximación numérica que se obtiene es un conjunto finito de puntos  $\{(t_j, x_j)\}$  y si se conoce la solución exacta  $x(t_j)$ , entonces podemos comparar  $x_j$  con  $x(t_j)$ .

## 2.3 Definiciones conceptuales

### 2.3.1 Deflexión:

Es la desviación de una corriente o de un fluido. La deflexión, matemáticamente es una función que está gobernada por la ecuación diferencial lineal de cuarto orden.



**Figura 3.** Elemento estructural que se desplaza bajo una fuerza o carga a la cual llamamos deflexión.

### 2.3.2 Vigas:

Es un elemento horizontal que forma parte de una estructura que soporta las cargas en varios puntos a lo largo del elemento.

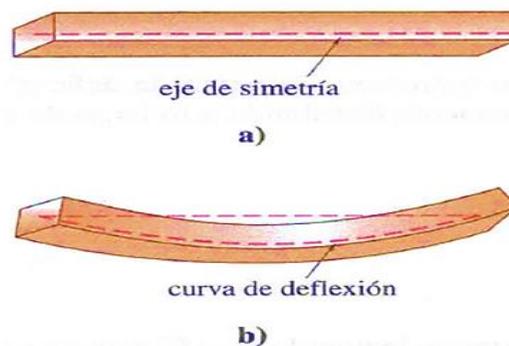


**Figura 4.** Viga que se denomina elemento lineal que trabaja con la flexión.

### 2.3.3 Deflexión de Vigas:

La deflexión es la deformación vertical por deflexión que sufren los puntos de una viga en el plano donde esta aplicada la carga, tomándose en una curvatura o desviación de una línea horizontal.

En la *figura 5* veremos el Eje de simetría que se encuentra en el plano, sabemos que mediante la elasticidad de la viga se puede distorsionarse en su forma, lo cual se llama curva elástica.



**Figura 5.** Eje de simetría en el plano y mediante la elasticidad cambia a una curva elástica.

### 2.3.4 Inercia:

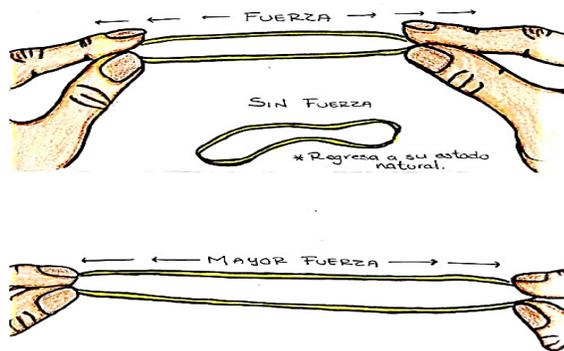
Es la propiedad que tienen los cuerpos de mantenerse en su estado de reposo o movimiento, mientras la fuerza sea igual a cero (primera ley de Newton) o la resistencia que opone la materia a cambiar su estado de reposo o movimiento.



**Figura 6.** Capacidad del cuerpo que por sí mismo cambian a un estado de reposo.

### 2.3.5 Elasticidad:

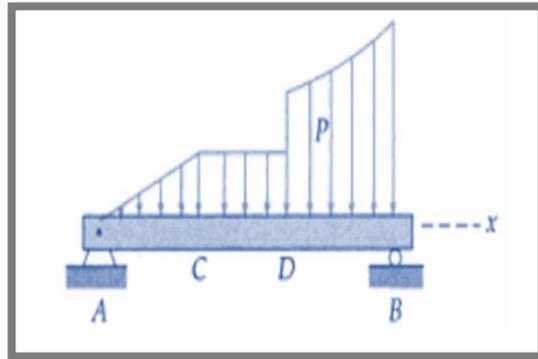
Propiedad que tienen algunos cuerpos para estirarse cuando son sometidos a fuerzas externas y recuperar su forma una vez que la acción de esta fuerza desaparece.



**Figura 7.** Objeto que representa alargamiento sin perder su estado natural.

### 2.3.6 Intensidad:

Es el grado de energía o magnitud de una fuerza física.



**Figura 8.** Intensidad con carga constante entre D y C y variable entre A y C y entre D y B.

### 2.3.7 Soluciòn Analítica:

Es aquella que puede manifestar como una escala de potencias convergente. Una funciòn analítica se puede determinar para funciones reales o complejas.

### 2.3.8 Particiòn:

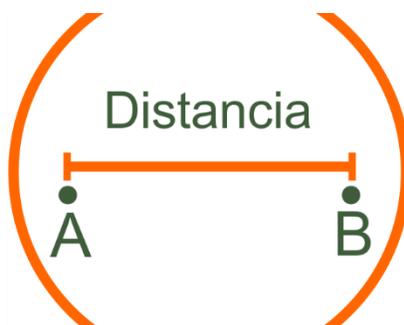
Es la divisiòn o distribuciòn de algo. En la matemàtica es el recubrimiento de los subconjuntos que pertenecen a una misma familia llamadas disjuntos.

### 2.3.9 Ecuaciòn Diferencial:

Es una ecuaciòn que contiene derivadas de una o mäs funciones dependientes de una o mäs variables independiente.

### 2.3.10 Distancia:

Es el total de longitud recorrida en un movimiento; es decir, es una medida escalar y en la matemática la distancia está entre dos puntos de un plano que corresponde a la longitud del segmento de una recta que los une.



*Figura 9.* Longitud del segmento de recta comprendida entre dos puntos.

### 2.3.11 Longitud:

Es un segmento, curva o línea fina, que se puede determinar su longitud a partir del principio de distancia.



*Figura 10.* Longitud de una dirección recorrida por un cuerpo en un tiempo determinado de 1m.

## 2.4 Formulación de hipótesis

### 2.4.1 Hipótesis General

. Con los datos proporcionados si se podrá aproximar la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6plg$ .

### 2.4.2 Hipótesis Específicas

Las soluciones numéricas obtenidas con los métodos de diferencias finitas tienen un error  $O(h^2)$ , por tanto, la reducción del tamaño de paso a su mitad producirá una disminución del error aproximadamente a su cuarta parte, luego este método ofrecerá menor vulnerabilidad ante el error de redondeo para la aproximación de la deflexión  $w(x)$  de la viga.

## Capítulo III: METODOLOGÍA

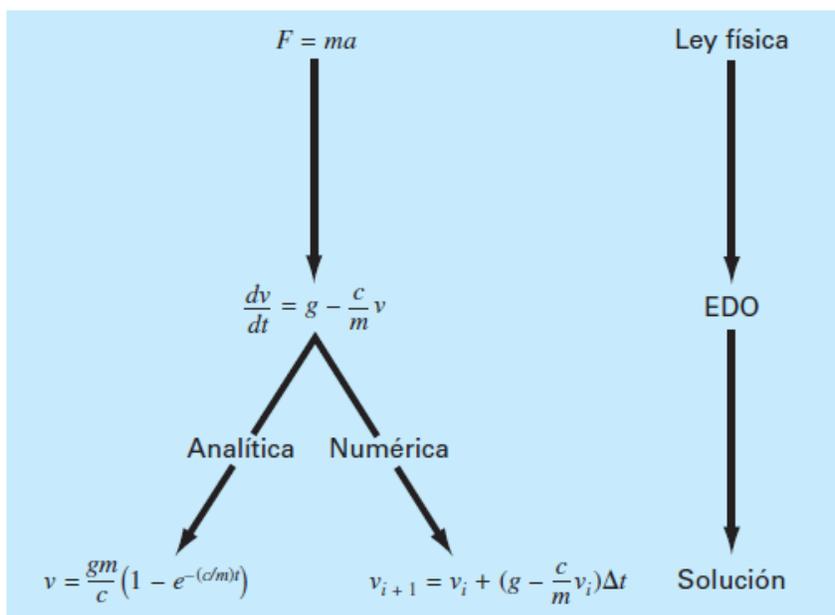
### 3.1. Diseño Metodológico

#### 3.1.1. Tipo

El tipo de la investigación es explicativa, Según el autor (Fidias G. Arias (2012)), define: La investigación explicativa se encarga de buscar el porqué de los hechos mediante el establecimiento de relaciones causa-efecto. En este sentido, los estudios explicativos pueden ocuparse tanto de la determinación de las causas (investigación post facto), como de los efectos (investigación experimental), mediante la prueba de hipótesis, sus resultados y conclusiones constituyen el nivel más profundo de conocimientos. (pag.26)

#### 3.1.2. Enfoque

Cuyo diseño puede esquematizarse del siguiente modo:



**Figura 11.** Diseño.

## 3.2. Población Y Muestra

### 3.2.1. Población

Sea la Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x - l),$$

Donde  $w(x)$  es la deflexión a una distancia  $x$  desde el extremo izquierdo de la viga, y  $l, q, E, S$  e  $I$  representan, respectivamente, la longitud de la viga, la intensidad de la carga uniforme, el módulo de elasticidad, el esfuerzo en los extremos y el momento central de inercia. Esta ecuación diferencial tiene asociados dos condiciones de frontera dadas por la suposición de que no ocurre deflexión alguna en los extremos de la viga.  $w(0) = w(l) = 0$ . Cuando la viga tiene un espesor uniforme, el producto  $EI$  es constante y la solución exacta se obtiene fácilmente. No obstante, en muchas aplicaciones el espesor no es uniforme y, por tanto, el momento de inercia  $I$  es una función de  $x$ , y se requiere métodos de aproximación.

### 3.2.2. Muestra

Sea la Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{El}w + \frac{qx}{2El}(x - 1), \quad 0 < x < l$$

Con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$ , suponga que la viga es de acero y del tipo  $W10$ , con las siguientes características: longitud  $l = 120 \text{ plg}$ , intensidad de carga uniforme  $q = 100 \text{ lb/plg}$ , módulo de elasticidad  $E = 3.0 \times 10^7 \text{ lb/plg}^2$ , esfuerzo en los extremos  $S = 1000 \text{ lb}$  y momento central de inercia  $I = 625 \text{ plg}^4$ . Aproxime la deflexión  $w(x)$  de la viga cada  $6 \text{ plg}$ .

### 3.3. Operacionalización de variables e indicadores

#### IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES

- VARIABLE DEPENDIENTE : deflexión
- VARIABLE INDEPENDIENTE : distancia

### 3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

#### 3.4.1. Técnica a Emplear.

Observación

- longitud  $l = 120 \text{ plg}$ ,
- intensidad de carga uniforme  $q = 100 \text{ lb/pie}$ ,
- módulo de elasticidad  $E = 3.0 \times 10^7 \text{ lb/plg}^2$ ,
- esfuerzo en los extremos  $S = 1000 \text{ lb}$
- momento central de inercia  $I = 625 \text{ plg}^4$

### 3.5. Técnicas para el Procesamiento de la información.

#### 1. Técnicas de Análisis:

- ✓ Revisión bibliográfica
- ✓ Tabulación de cuadros.

#### 2. Para el procesamiento de los datos que se obtendrán son las siguientes:

- ✓ Algoritmos.
- ✓ Programa de cómputo.

## Capítulo IV: RESULTADOS

### 4.1. Aplicación: Ecuación diferencial ordinaria con valor de frontera a la ingeniería civil

#### 4.1.1. Planteamiento.

Un problema común en ingeniería civil es el que se relaciona con la deflexión de una viga de sección transversal rectangular sujeta a una carga uniforme, mientras sus extremos están soportados de modo que no experimentan deflexión alguna

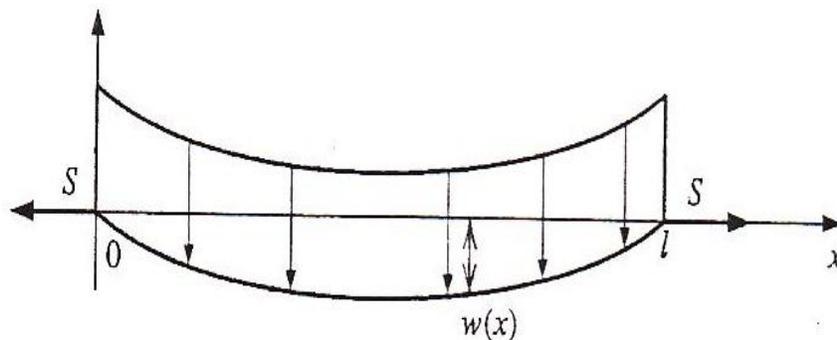


Figura 12. Deflexión de la viga.

La ecuación diferencial que aproxima la situación física es de la forma:

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l)$$

donde:

$w(x)$ : es la deflexión a una distancia  $x$  desde el extremo izquierdo de la viga

$l$ : Longitud de la viga,

$q$ : La intensidad de la carga uniforme,

$E$ : El módulo de elasticidad,

$S$ : El esfuerzo en los extremos

$I$ : Momento central de inercia.

Esta ecuación diferencial tiene asociado dos condiciones de frontera dadas por la suposición de que no ocurre deflexión alguna en los extremos de la viga.

$$w(x) = w(l) = 0.$$

Cuando la viga tiene un espesor uniforme, el producto de  $EI$  es constante y la solución exacta se obtiene fácilmente. No obstante muchas aplicaciones el espesor no es uniforme y por tanto el momento de inercia es una  $I$  es una función de  $x$ , y se requiere métodos de aproximación.

#### 4.1.2. Formulación del problema.

Se considera el problema de deflexión de una viga con los extremos soportados sujetos a una carga uniforme. El problema con valor de frontera que rige esta situación física es:

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l) \quad 0 < x < l,$$

con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$ .

Los datos fueron tomados de una vivienda en construcción ubicada: Torre Blanca Calle Santa Beatriz Mz A. Lt. 15, en la cual la viga es de acero y del tipo W10, con las siguientes características:  $l = 120$  plg, intensidad de la carga uniforme  $q = 100$  lb/pie, módulo de elasticidad  $E = 3.0 \times 10^7$  lb/plg<sup>2</sup>, esfuerzo en los extremos  $S = 1000$  lb y momento central de inercia  $I = 625$  plg<sup>4</sup>.

Es decir:

$$\frac{d^2w}{dx^2}(x) = \frac{1000 \text{ lb}}{(3.0 * 10^7 \text{ lb/plg}^2)(625 \text{ plg}^4)}w(x) + \frac{100 \frac{\text{lb}}{\text{pie}}}{2 \left(3.0 * \frac{10^7 \text{ lb}}{\text{plg}^2}\right)(625 \text{ plg}^4)}x(x - 120 \text{ plg})..(1)$$

Tenemos que calcular lo siguiente:

a) Aproximar la deflexión  $w(x)$  cada 6 plg.

### 4.1.3. Solución.

La solución la daremos con el Método de disparo lineal y el Método de diferencia finitas.

#### A) Solución con el método de disparo lineal.

1) Convertir la ecuación diferencial (1) de condición frontera en dos ecuaciones diferenciales de condición inicial tenemos así:

$$a). \frac{d^2 w_1}{dx^2}(x) = \frac{1000 lb}{\left(3.0 * 10^7 \frac{lb^2}{plg}\right)(625plg^4)} w_1(x) + \frac{100 \frac{lb}{pie}}{2 \left(3.0 * \frac{10^7 lb}{plg^2}\right)(625plg^4)} x(x - 120plg)$$

$$0 < x < 120 \quad w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) = 0$$

$$b). \frac{d^2 w_2}{dx^2}(x) = \frac{1000 lb}{\left(3.0 * 10^7 \frac{lb^2}{plg}\right)(625plg^4)} w_2(x) \quad 0 < x < 120 \quad w_2(0) = 0, \quad w_2'(0) = 1$$

Así de a) y b) obtendremos aproximaciones  $W_1$  y  $W_2$  respectivamente, para que luego nuestro solución al problema de valor frontera de (1) sea la siguiente combinación lineal:

$$w(x) = w_1(x) + \frac{0 - w_1(120 plg)}{w_2(120plg)} w_2(x) \quad 0 < x < 120 plg \quad \dots (2)$$

2) Ahora debemos resolver dos ecuaciones diferenciales de orden superior es decir a) y b).  
iniciaremos con a), ya que es de orden 2, este se deberá transformar a un sistema de

ecuaciones diferenciales de orden 1. Para evitar el uso de demasiados sub-índices reescribiremos la ecuación a), siendo  $w_1(x)$  ahora  $u(t)$ , respectivamente así tenemos:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) = \frac{1000 \text{ lb}}{\left(3.0 * 10^7 \frac{\text{lb}^2}{\text{plg}}\right) (625 \text{ plg}^4)} u(t) + \frac{100 \frac{\text{lb}}{\text{pie}}}{2 \left(3.0 * \frac{10^7 \text{ lb}}{\text{plg}^2}\right) (625 \text{ plg}^4)} t(t - 120 \text{ plg})$$

$$0 < t < 120 \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

Ahora realizando la transformación a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de orden 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2u}{dt^2}(t) = v(t) \\ \frac{d^2v}{dt^2}(t) = \frac{1000 \text{ lb}}{\left(3.0 * 10^7 \frac{\text{lb}^2}{\text{plg}}\right) (625 \text{ plg}^4)} u(t) + \frac{100 \frac{\text{lb}}{\text{pie}}}{2 \left(3.0 * \frac{10^7 \text{ lb}}{\text{plg}^2}\right) (625 \text{ plg}^4)} t(t - 120 \text{ plg}) \\ 0 < t < 120 \quad u(0) = 0, \quad v(0) = 0 \end{array} \right.$$

Ahora solo queda resolver este sistema de ecuaciones Diferenciales de orden 1 con el método R.K.4 para sistemas. La solución de esta estará en la tabla 2 de Excel, para nuestra comodidad sabemos que los resultados  $u_{1,i}$  son los  $w_1(x)$  que buscábamos .

3) De igual manera se pasará a resolver b) este se deberá transformar a un sistema de ecuaciones diferenciales de orden 1. Para evitar el uso de demasiados sub-índices reescribiremos la ecuación b), siendo  $w_2(x)$  ahora  $u(t)$ , respectivamente así tenemos:

$$\frac{d^2u}{dt^2}(t) = \frac{1000 \text{ lb}}{\left(3.0 * 10^7 \frac{\text{lb}^2}{\text{plg}}\right) (625 \text{plg}^4)} u(t);$$

$$0 < t < 120 \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1$$

Ahora realizando la transformación a un sistema de dos ecuaciones diferencial de orden 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2u}{dt^2}(t) = \frac{1000 \text{ lb}}{\left(3.0 * 10^7 \frac{\text{lb}^2}{\text{plg}}\right) (625 \text{plg}^4)} u(t) ; \quad 0 < t < 120 \quad u(0) = 0, v(0) = 1 \\ \frac{d^2v}{dt^2}(t) = v(t) \end{array} \right.$$

Ahora solo queda resolver este sistema de Ecuaciones Diferenciales de orden 1 con el método R.K.4 para sistemas. La solución de esta estará en la tabla 2 de Excel, para nuestra comodidad sabemos que los resultados  $u_{2,i}$  son los  $w_2(x)$  que buscábamos.

4) Ahora de la tabla 2 recolectaremos sus datos  $w_1$  y  $w_2$  y hallamos  $w(x)$  que estarán en la misma tabla 2 de Excel, así tenemos:

**Tabla2**  
Resultados para la deflexión aproximada con el método de disparo lineal.

Iteraciones I	$w_1(x)$	$w_2(x)$	Deflexión $w(x)$ (mm)
0	0	0	0
1	-1.1232E-05	6.0012	0.00218774
2	-8.7572E-05	12.0096022	0.00431301
3	-0.00028787	18.0324173	0.0063196
4	-0.00066421	24.0768735	0.00815808
5	-0.00126198	30.1502248	0.00978572
6	-0.00211991	36.25976	0.01116645
7	-0.00327014	42.4128113	0.01227083
8	-0.00473825	48.616763	0.01307598
9	-0.00654328	54.8790607	0.0135656
10	-0.00869777	61.2072198	0.01372989
11	-0.01120775	67.608835	0.0135656
12	-0.01407278	74.0915889	0.01307598
13	-0.01728594	80.6632615	0.01227083
14	-0.02083379	87.3317398	0.01116645
15	-0.02469641	94.1050266	0.00978572
16	-0.02884731	100.991251	0.00815808
17	-0.03325346	107.998676	0.0063196
18	-0.03787522	115.135714	0.00431301
19	-0.04266628	122.410927	0.00218774
20	-0.04757365	129.833049	0

Fuente: Elaboración propia.

**Tabla3**  
Resultado del análisis de error cuadrático medio del método de disparo lineal.

X	w(x)	w*(x)	w-w*(x)  EM	w-w*(x)  <sup>2</sup> ECM
0	-0.001	0	0.001	1E-06
1	-0.00080897	0.00218774	0.002996708	8.98026E-06
2	-0.00062338	0.00431301	0.004936388	2.43679E-05
3	-0.00044812	0.0063196	0.006767723	4.58021E-05
4	-0.00028752	0.00815808	0.008445605	7.13282E-05
5	-0.00014533	0.00978572	0.009931046	9.86257E-05
6	-2.4694E-05	0.01116645	0.011191144	0.000125242
7	7.1778E-05	0.01227083	0.012199052	0.000148817
8	0.00014208	0.01307598	0.012933905	0.000167286
9	0.00018476	0.0135656	0.013380842	0.000179047
10	0.00019896	0.01372989	0.013530929	0.000183086
11	0.0001844	0.0135656	0.013381202	0.000179057
12	0.00014136	0.01307598	0.012934624	0.000167304
13	7.0699E-05	0.01227083	0.012200131	0.000148843
14	-2.6133E-05	0.01116645	0.011192583	0.000125274
15	-0.00014712	0.00978572	0.009932844	9.86614E-05
16	-0.00028968	0.00815808	0.008447762	7.13647E-05
17	-0.00045064	0.0063196	0.006770241	4.58362E-05
18	-0.00062625	0.00431301	0.004939265	2.43963E-05
19	-0.00081221	0.00218774	0.002999945	8.99967E-06
20	-0.0010036	0	0.001003597	1.00721E-06
	SUMATORIA		0.009055777	0.009808989

Fuente: Elaboración propia.

**B) Solución con el método de diferencias finitas.**

1) Siguiendo con el método descrito tenemos que en la ecuación (1):

$$P(x) = 0$$

$$Q(x) = \frac{1000lb}{2 \left( 3.0 * \frac{10^7 lb}{plg^2} \right) (625plg^4)}$$

$$R(x) = \frac{100 \frac{lb}{pie}}{2 \left( 3.0 * \frac{10^7 lb}{plg^2} \right) (625plg^4)} x(x - 120plg)$$

2) El desarrollo se encuentra en la Tabla 4 de Excel. Aplicando tendremos los siguientes resultados:

**Tabla4**

Resultados para la deflexión aproximada con el método de diferencias finitas.

Deflexión $w(x)$	=	$w(x)$ (mm)
W0	=	0
W1	=	0.00219278
W2	=	0.00432253
W3	=	0.00633305
W4	=	0.00817491
W5	=	0.0098054
W6	=	0.01118846
W7	=	0.01229464
W8	=	0.01310107
W9	=	0.01359145
W10	=	0.013756
W11	=	0.01359145
W12	=	0.01310107
W13	=	0.01229464
W14	=	0.01118846
W15	=	0.0098054
W16	=	0.00817491
W17	=	0.00633305
W18	=	0.00432253
W19	=	0.00219278
W20	=	0

Fuente: Elaboración propia

**Tabla5**

Resultado del análisis de error cuadrático medio del método de las diferencias finitas.

Distancia cada 6 metros X	w(x)	w*(x)	w-w*(x)  EM	w-w*(x)  <sup>2</sup> ECM
0	-0.001	0	0.001	1E-06
1	-0.00080897	0.00219278	0.003001748	9.01049E-06
2	-0.00062338	0.00432253	0.004945908	2.4462E-05
3	-0.00044812	0.00633305	0.006781173	4.59843E-05
4	-0.00028752	0.00817491	0.008462435	7.16128E-05
5	-0.00014533	0.0098054	0.009950726	9.90169E-05
6	-2.4694E-05	0.01118846	0.011213154	0.000125735
7	7.1778E-05	0.01229464	0.012222862	0.000149398
8	0.00014208	0.01310107	0.012958995	0.000167936
9	0.00018476	0.01359145	0.013406692	0.000179739
10	0.00019896	0.013756	0.013557039	0.000183793
11	0.0001844	0.01359145	0.013407052	0.000179749
12	0.00014136	0.01310107	0.012959714	0.000167954
13	7.0699E-05	0.01229464	0.012223941	0.000149425
14	-2.6133E-05	0.01118846	0.011214593	0.000125767
15	-0.00014712	0.0098054	0.009952524	9.90527E-05
16	-0.00028968	0.00817491	0.008464592	7.16493E-05
17	-0.00045064	0.00633305	0.006783691	4.60185E-05
18	-0.00062625	0.00432253	0.004948785	2.44905E-05
19	-0.00081221	0.00219278	0.003004985	9.02994E-06
20	-0.0010036	0	0.001003597	1.00721E-06
<b>SUMATORIA</b>			0.00907321	0.0098281

Fuente: Elaboración propia.

De las tablas 3 y 5 se obtiene que para la aproximación de la deflexión  $w(x)$  de la viga cada 6 pulgadas con un error cuadrado medio (ECM),  $ECM=0,0098088989$  para la aproximación con el método de disparo lineal y un  $ECM=0,0098281$  para la aproximación con los métodos de diferencias finitas.

A pesar de que el método de disparo lineal es bastante exacto, en ciertos casos pueden producirse errores de redondeo que perjudican la precisión de las soluciones obtenidas.

Por ejemplo, cuando la aproximación a la solución  $y_1(x)$  crece rápidamente cuando  $x$  recorre el intervalo  $[a, b]$ , entonces el valor de  $y_1$  es grande; además,  $z_2$  es pequeño en comparación con  $y_{1,N}$ , entonces:

$$y_{12,0} = \frac{z_2 - y_{11,N}}{y_{21,N}} \cong -\frac{y_{11,N}}{y_{21,N}}$$

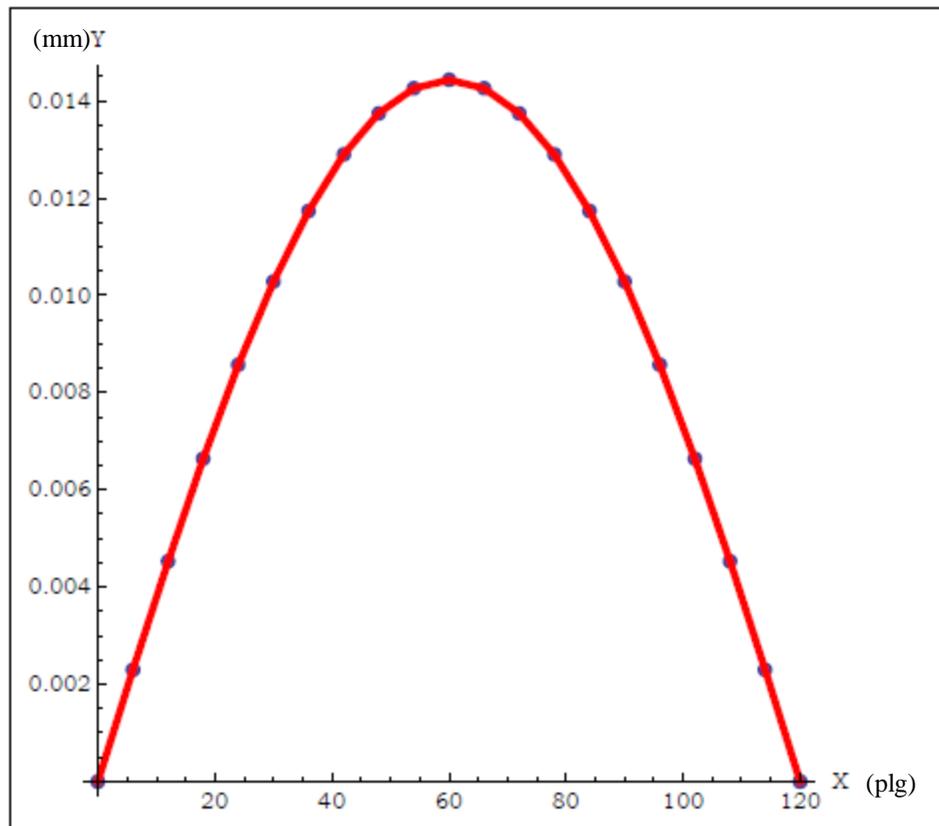
de modo que:

$$\left. \begin{aligned} w_{1,i} &= y_{11,i} + w_{2,0} * y_{21,i} \cong y_{11,i} - \frac{y_{11,N}}{y_{21,N}} y_{21,i} \\ w_{2,i} &= y_{12,i} + w_{2,0} * y_{22,i} \cong y_{12,i} - \frac{y_{12,N}}{y_{22,N}} y_{22,i} \end{aligned} \right\}$$

Como consecuencia de lo anterior puede producirse una pérdida de dígitos significativos por cancelación. Pero al ser  $y_{11,i}$  una aproximación a  $y_1(x_i)$ , es posible vigilar el comportamiento de  $y_1(x)$  para tratar de prevenir situaciones de este tipo.

Por otra parte la convergencia por el método de diferencias finitas es buena, sin embargo el problema se plantea al escoger el valor de  $\Delta x$ . Aunque en teoría la mejor aproximación a la derivada se obtendría cuando  $\Delta x$  fuese lo más pequeño posible, debemos tener en cuenta las consideraciones sobre los errores de redondeo y los cálculos de precisión finita. De tal manera que el parámetro  $\Delta x$  debe escogerse lo suficientemente grande para evitar que:  $f(x + \Delta x) = f(x)$ .

Por lo que para el caso que se nos presenta en la aproximación de la deflexión  $w(x)$ , el método que ofrece mayor vulnerabilidad es el método de disparo lineal, dado que se tienen que estar vigilando el comportamiento  $w_1(x)$  crece rápidamente cuando  $x$  recorre el intervalo  $[0, 120]$ .



**Figura 13.** Figura aproximada con un tamaño de paso  $h=6$ .

La figura 13 nos muestra que con los dos métodos podemos observar que la mayor deflexión se da a 60 pulgadas de distancia del punto inicial aproximadamente con 0.014 mm. y cumple con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$  para  $0 < x < l$ . ( $l = 120$  pulgadas).

## Capítulo V: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### 5.1. Discusión

En la Investigación se mostró, que, con el métodos de disparo lineal y el método de las diferencias finitas la mayor deflexión se da a 60 pulgadas de distancia del punto inicial aproximadamente y que también cumple con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$  para  $0 < x < l$ . ( $l = 120$  *pulgadas*). Con el método de disparo lineal se encontró que ECM es de 0,009808989 y que hay que vigilar el comportamiento  $w_1(x)$  que crece rápidamente cuando  $x$  recorre el intervalo  $[0, 120]$ , mientras que, con el método de diferencias finitas el ECM es 0,0098281 y que es importante escoger un tamaño de paso  $\Delta x$  adecuado para reducir el error , así el método de diferencias finitas tiene menor vulnerabilidad ante el error de redondeo para la aproximación de la deflexión  $w(x)$  de la viga.

### 5.2. Conclusiones

- ✓ En la figura 13 nos muestra que con los dos métodos podemos observar que la mayor deflexión se da a 60 pulgadas de distancia del punto inicial aproximadamente.
- ✓ La gráfica nos muestra que cumple con las condiciones de frontera  $w(0) = 0$  y  $w(l) = 0$  para  $0 < x < l$ . ( $l = 120$  *pulgadas*).
- ✓ Una vez realizado el presente trabajo monográfico sobre el estudio, programación y aplicación de los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con valor en frontera se pueden expresar las siguientes:

- ✓ La aproximación a la solución mediante el método de disparo lineal que utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden, ofrece una precisión o exactitud  $O(h^4)$ . Tiene el inconveniente de que utiliza una técnica por error en el redondeo que puede, en algún caso, presentar algún problema oculto, pudiendo ofrecer una pérdida de los dígitos significativos debido al proceso de cancelación en el algoritmo empleado, es decir, pérdida de significación al restar dos cantidades próximas entre sí. Tiene la ventaja de que ha sido un método relativamente fácil de implementar en el programa Excel.
  
- ✓ Los métodos de diferencias finitas, para problemas lineales presentan mejores características de estabilidad, a costa de realizar más cómputo para obtener la solución con la misma precisión. Estos métodos de diferencias finitas remplazan las derivadas en la ecuación diferencial por un cociente de diferencias centradas, lo que obliga a escoger un parámetro  $h$ , tamaño del subintervalo, no demasiado pequeño. En particular, el método de las diferencias finitas para problemas lineales emplea la resolución de un sistema lineal tridiagonal, cuya solución única requiere que cumpla el teorema ya explicitado en el método. Este método presenta un error del orden  $O(h^2)$  frente al error de truncamiento  $O(h^4)$  que incluía el método de *Runge-Kutta*.

### 5.3.Recomendaciones

Se recomienda hacer más ensayos con el tamaño de paso para el método de diferencias finitas.

## Capítulo VI: FUENTES DE INFORMACIÓN

### 6.1. Fuentes Bibliográficas

Burden, R. y Douglas, J. (2001). *Análisis Numérica 7ª Edición*, México: International Thomson Editores.

Mathews, J. y Kurtis, D. (2000). *Métodos Numéricos con Matlab 3ª Edición*, Madrid: Prentice Hall.

Chapra, S. y Raymond, P. (2015). *Métodos Numéricos para Ingenieros 7ª Edición*, México: Mc Graw Hill Education.

Bojorquez K. (2014). *Ecuaciones Diferenciales*. Universidad de Autónoma de Chihuahua, Facultad de Ingeniera, México.

### 6.2. Fuentes Electrónicas

*Deflexión*. (Wikipedia). Recuperado el 17 de julio de 2014, de <https://es.wikipedia.org/wiki/Deflexión>

*Viga*. (wikipedia). Recuperado el 5 de abril de 2019, de <https://es.wikipedia.org/wiki/Viga>

*Inercia*. (Enciclopedia de Tareas), de <https://www.encyclopediadetareas.net/2012/03/que-es-la-inercia.html>.

Bembibre, C. *Elasticidad*. (Definición.DE). Recuperado en julio del 2010, de <https://www.definicionabc.com/general/elasticidad.php>

Pérez, J. y Merino, M., (2010). *Intensidad. (Definición.DE)*. Actualizado el 2012, de <https://definicion.de/intensidad/>

*Función Analítica.(Wikipedia)*. Recuperado el 5 abril del 2019, de [https://es.wikipedia.org/wiki/Función\\_analítica](https://es.wikipedia.org/wiki/Función_analítica)

Pérez, J. y Merino, M. (2010). *Partición. (Definición.DE)*. Actualizado el 2013, de <https://definicion.de/particion/>

Pérez, J. y Gardey, A. (2010). *Distancia. (Definición.DE)* Actualizado el 2012, de <https://definicion.de/distancia/>

*Longitud. (Wikipedia)*. Recuperado el 23 marzo del 2019, de <https://es.wikipedia.org/wiki/Longitud>

## ANEXOS

## ANEXO 01: ALGORITMO DEL MÉTODO DE DISPARO LINEAL

Para aproximar la solución del problema con valor de frontera

$$-y'' + p(x)y' + q(x)y + r(x) = 0, a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta:$$

ENTRADA extremos  $a, b$ ; condiciones de frontera  $\alpha, \beta$ ; número de subintervalos  $N$ .

SALIDA aproximaciones  $w_{1,i}ay(x_i)$ ;  $ay'(x_i)$  para cada  $i = 0, 1, \dots, N$ .

**Paso 1** Tome  $h(b - a) / N$ ;

$$u_{1,0} = \alpha;$$

$$u_{2,0} = 0;$$

$$v_{1,0} = 0;$$

$$v_{2,0} = 1.$$

**Paso 2** Para  $i = 0, \dots, N - 1$  haga los pasos 3-4.

(El método de Runge-Kutta para sistemas se utiliza en pasos 3 y 4.)

**Paso 3** Tome  $x = a + ih$ .

**Paso 4** Tome  $k_{1,1} = hu_{2,i}$ ;

$$k_{1,2}h[p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)];$$

$$k_{2,1} = h\left[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right];$$

$$k_{2,2} = h\left[p\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}\right) + q\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}\right) + r\left(x + \frac{h}{2}\right)\right];$$

$$k_{3,2} = h\left[p\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}\right) + q\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}\right) + r\left(x + \frac{h}{2}\right)\right];$$

$$k_{4,1} = h[u_{2,i} + k_{3,2}];$$

$$k_{4,2} = h[p(x+h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x+h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x+h)];$$

$$k_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}];$$

$$k_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}];$$

$$k'_{1,1} = hv_{2,i}.$$

$$k'_{1,2} = h[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}]$$

$$k'_{2,1} = h\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}\right];$$

$$k'_{2,2} = h\left[p\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}\right) + q\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1}\right)\right];$$

$$k'_{3,1} = h\left[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}\right];$$

$$k'_{3,2} = h\left[p\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}\right) + q\left(x + \frac{h}{2}\right)\left(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1}\right)\right];$$

$$k'_{4,1} = h[v_{2,i} + k'_{3,2}];$$

$$k'_{4,2} = h[p(x+h)(v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x+h)(v_{1,i} + k'_{3,1})];$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}];$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}].$$

**Paso 5** Tome  $w_{1,0} = \alpha$ ;

$$w_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$$

SALIDA  $\alpha, w_{1,0}, w_{2,0}$

**Paso 6** Para  $i = 1, \dots, N$

Tome  $w_1 = u_{1,i} + u'_{2,0}v_{1,i}$ ;

$w_2 = u_{2,i} + u'_{2,0}v_{2,i}$ ;

$x = \alpha + ih$ ;

SALIDA  $(x, w_1, w_2)$ . (La salida es  $x_i, w_{1,i}, w_{2,i}$ )

**Paso 7** PARAR. (Procedimiento terminado)

## ANEXO 02: PROGRAMA DEL MÉTODO DE DISPARO LINEAL (MATLAB)

```

function disparo(p,q,r,a,b,alpha,beta,N)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Método del disparo lineal para aproximar la solución del problema %
% con valor de frontera %
%  $-y''+p(x)y'+q(x)y+r(x)=0$ , para  $a \leq x \leq b$ ,  $y(a)=\alpha$ ,  $y(b)=\beta$  %
% VALORES DE ENTRADA: Extremos a,b; condiciones de frontera %
% alpha, beta; números de intervalos N %
% %
% VALORES DE SALIDA: aproximaciones w(1,i) a y(xi); w(2,i) a y'(xi) %
% para cada  $i= 0,1,\dots,N$  %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Paso 1
h=(b-a)/N;
u1(1)=alpha;
u2(1)=0;
v1(1)=0;
v2(1)=1;
k1=[];
k2=[];
%Paso 2
for i=1:1:N
    % Hacer los paso 3,4 a continuación
    % El método de Runge-Kutta para sistemas se utiliza en los pasos
    % 3 y 4
    %Paso 3
        y=a+(i-1)*h;
        x=y;
    %Paso 4
        k1(1,1)=h*u2(i);
        k1(1,2)=h*(eval(p)*u2(i)+eval(q)*u1(i)+eval(r));
        k1(2,1)=h*(u2(i)+0.5*k1(1,2));
        x=y+h/2;

k1(2,2)=h*(eval(p)*(u2(i)+0.5*k1(1,2))+eval(q)*(u1(i)+0.2*k1(1,1))+eval(r))
;

        k1(3,1)=h*(u2(i)+0.5*k1(2,2));

k1(3,2)=h*(eval(p)*(u2(i)+k1(2,2)/2)+eval(q)*(u1(i)+k1(2,1)/2)+eval(r));
        k1(4,1)=h*(u2(i)+k1(3,2));

```

```

x=y+h;

k1(4,2)=h*(eval(p)*(u2(i)+k1(3,2))+eval(q)*(u1(i)+k1(3,1))+eval(r));
u1(i+1)=u1(i)+(k1(1,1)+2*k1(2,1)+2*k1(3,1)+k1(4,1))/6;
u2(i+1)=u2(i)+(k1(1,2)+2*k1(2,2)+2*k1(3,2)+k1(4,2))/6;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

x=y;
k2(1,1)=h*v2(i);
k2(1,2)=h*(eval(p)*v2(i)+eval(q)*v1(i));
k2(2,1)=h*(v2(i)+0.5*k2(1,2));
x=y+h/2;

k2(2,2)=h*(eval(p)*(v2(i)+0.5*k2(1,2))+eval(q)*(v1(i)+0.2*k2(1,1)));
k2(3,1)=h*(v2(i)+0.5*k2(2,2));

k2(3,2)=h*(eval(p)*(v2(i)+k2(2,2)/2)+eval(q)*(v1(i)+k2(2,1)/2));
k2(4,1)=h*(v2(i)+k2(3,2));
x=y+h;

k2(4,2)=h*(eval(p)*(v2(i)+k2(3,2))+eval(q)*(v1(i)+k2(3,1)));
v1(i+1)=v1(i)+(k2(1,1)+2*k2(2,1)+2*k2(3,1)+k2(4,1))/6;
v2(i+1)=v2(i)+(k2(1,2)+2*k2(2,2)+2*k2(3,2)+k2(4,2))/6;

end
w1(1)=alpha;
w2(1)=(beta-u1(N))/v1(N);
x=[];

disp('=====');
disp('=====');
disp('iteración   x(i)                u1(i)          v1(i)          w1(i)');
disp('y(xi)        |y(xi)-w1(i)|   ');
disp('=====');
disp('=====');

y=a;
c1=1.1392070132;
c2=-0.0392070132;
y1(i)=eval('c1*y+c2/y^2-0.3*sin(log(y))-0.1*cos(log(y))');
fprintf('%4.0f %15.2f %15.6f %13.6f %13.6f %15.5f\n', [1,y(1),u1(1),v1(1),u1(1),eval('c1*y+c2/y^2-0.3*sin(log(y))-0.1*cos(log(y))'),abs(w1(1)-1)]);

```

```
for i=2:1:N+1
    w1(i)=u1(i)+w2(1)*v1(i);
    w2(i)=u2(i)+w2(1)*v2(i);
    x(i)=a+(i-1)*h;
    y=x(i);
    c1=1.1392070132;
    c2=-0.0392070132;
    y1(i)=eval('c1*y+c2/y^2-0.3*sin(log(y))-0.1*cos(log(y))');
fprintf('%4.0f %15.2f %15.6f %13.6f %13.6f %15.5f
%15.4f\n', [i,x(i),u1(i),v1(i),w1(i),eval('c1*y+c2/y^2-0.3*sin(log(y))-
0.1*cos(log(y))'),abs(w1(i)-y1(i))]);
end
plot(x,y1,'og')
hold on
plot(x,w1,'ok')
grid on
hold of
```

**ANEXO 03: ALGORITMO DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS**

Para aproximar la solución al problema de valor de frontera

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta;$$

ENTRADA extremos  $a, b$ ; condiciones de frontera  $\alpha, \beta$ ; entero  $N \geq 2$ .

SALIDA aproximaciones  $u_i'$  a  $y(x_i)$  para toda  $i = 0, 1, \dots, N + 1$ .

**Paso 1** Tome  $h = (b - a)/(N + 1)$ ;

$$x = a + h;$$

$$a_1 = 2 + h^2 q(x);$$

$$b_1 = -1 + \left(\frac{h}{2}\right)p(x);$$

$$d_1 = -h^2 r(x) \left(1 + \left(\frac{h}{2}\right)p(x)\right) \alpha.$$

**Paso 2** Para  $i = 2, \dots, N - 1$

$$\text{tome } x = a + ih;$$

$$a_i = 2 + h^2 q(x);$$

$$b_i = -1 + \left(\frac{h}{2}\right)p(x);$$

$$c_i = -11 \left(\frac{h}{2}\right)p(x);$$

$$d_i = -h^2 r(x).$$

**Paso 3** Tome  $x = b - h$ ;

$$a_N = 2 + h^2 q(x);$$

$$c_N = -1 - \left(\frac{h}{2}\right)p(x);$$

$$d_N = -h^2 r(x) + \left(1 - \left(\frac{h}{2}\right)p(x)\right) \beta.$$

**Paso 4** Tome  $l_1 = a_1$ ;

$$u_1 = b_1/a_1;$$

$$z_1 = d_1/l_1.$$

**Paso 5** Tome  $i = 2, \dots, N - 1$ , tome  $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$ ;

$$u_i = b_i/l_i;$$

$$z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i.$$

**Paso 6** Tome  $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$ ;

$$z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N$$

**Paso 7** Tome  $w_0 = \alpha$ ;

$$w_{N+1} = \beta.$$

$$w_N = z_N$$

**Paso 8** Para  $i = N - 1, \dots, 1$ , tome  $w_i = z_i - u_i w_{i+1}$ .

**Paso 9** Para  $i = 0, \dots, N + 1$ , tome  $x = a + ih$ ;

SALIDA  $(x, w_i)$ .

**Paso 10** PARAR. (*Procedimiento terminado*)

## ANEXO 04: PROGRAMA DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (MATLAB)

```

function Diferenciasfinitas(p,q,r,a,b,alpha,beta,N)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Método del disparo lineal para aproximar la solución del problema %
% con valor de frontera %
%  $-y''+p(x)y'+q(x)y+r(x)=0$ , para  $a \leq x \leq b$ ,  $y(a)=\alpha$ ,  $y(b)=\beta$  %
% VALORES DE ENTRADA: Extremos a,b; condiciones de frontera,alpha, %
% beta; entero  $N \geq 2$  %
% %
% VALORES DE SALIDA: aproximaciones  $w_i$  a  $y(x_i)$  para cada  $i= 0,1,\dots,N+1$  %
% %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Paso 1
h=(b-a)/(N+1);
a1(1)=0;
b1(1)=0;
d(2)=0;
x=a+h;
a1(2)=2+h^2*eval(q);
b1(2)=-1+(h/2)*eval(p);
d(2)=-h^2*eval(r)+(1+(h/2)*eval(p))*alpha;
%Paso 2
for i=3:1:N
    y=a+(i-1)*h;
    x=y;
    a1(i)=2+h^2*eval(q);
    b1(i)=-1+(h/2)*eval(p);
    c(i)=-1-(h/2)*eval(p);
    d(i)=-h^2*eval(r);
end
%Paso 3
x=b-h;
a1(N+1)=2+h^2*eval(q);
c(N+1)=-1-(h/2)*eval(p);
d(N+1)=-h^2*eval(r)+(1-(h/2)*eval(p))*beta;

%Paso 4
l(2)=a1(2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Los pasos 4-8 resuelven un sistema lineal tridiagonal %

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u(2)=b1(2)/a1(2);
z(2)=d(2)/l(2);
%Paso 5
    for i=3:1:N
        l(i)=a1(i)-c(i)*u(i-1);
        u(i)=b1(i)/l(i);
        z(i)=(d(i)-c(i)*z(i-1))/l(i);
    end
% Paso 6
    l(N+1)=a1(N+1)-c(N+1)*u(N);
    z(N+1)=(d(N+1)-c(N+1)*z(N))/l(N+1);
% Paso 7
    w(1)=alpha;
    w(N+2)=beta;
    w(N+1)=z(N+1);
% Paso 8
    for i=N:-1:2
        w(i)=z(i)-u(i)*w(i+1);
    end
% Pasi 9
    for i=1:1:N+2
        x(i)=a+(i-1)*h;
        y=a+(i-1)*h;
        c1=1.1392070132;
        c2=-0.0392070132;
        y1(i)=eval('c1*y+c2/y^2-0.3*sin(log(y))-0.1*cos(log(y))');
    end
disp('=====
=====');
disp('iteración    x(i)                w(i)                y(xi)                |y(xi)-
w1(i)| ');
disp('=====
=====');
for i=1:1:N+2
fprintf('%4.0f %13.2f %13.6f %15.5f %15.4f\n',[i,x(i),w(i),y1(i),abs(w(i)-
y1(i))]);
end
    plot(x,y1,'og')
    hold on
    plot(x,w,'ok')

```

grid on