UNIVERSIDAD NACIONAL JOSE FAUSTINO SANCHEZ CARRION

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA

TESIS

UNA GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE YONEDA A DIMENSIONES SUPERIORES

PRESENTADO POR:

BACH.BARRENECHEA ALFARO RENATO JESUS

ASESOR: Mo. ROJAS PAZ JORGE.

Tesis presentada para optar el título de Lic. En Matemática Aplicada

HUACHO-PERÙ

2019

PRESIDENTE:

Mg. ISIDRO JAVIER, RIOS PEREZ

SECRETARIO:

MG. SANTIAGO PEDRO, RAVINES MIRANDA

VOCAL:

Mo. CRISTIAN MILTON, MENDOZA FLORES

ASESOR:

Mo. ROJAS PAZ, JORGE LUIS

Dedicatoria

A mis grandes amigos.

Agradecimientos

En primer lugar agradecer a Dios, y principalmente a mis padres, Carlos y Noemì, por permitirme cursar estudios universitarios y descubrir un mundo fascinante con las matemáticas.

Agradecer también a mi supervisor Rojas Paz Jorge por su constante apoyo, guía e inspiración durante la elaboración de este trabajo. Por último agradecer a las personas que me ayudaron a corregir diferentes diagramas del trabajo con LaTeX.

Índice general

Agradecimientos 5

Índice general **7**

Resumen 11

Introducción 15

1. Planteamiento del problema **17**

1.1. Descripción de la realidad problemática 17

1.2. Formulación del problema 19

1.2.1. Problema general 19

1.2.2. Problemas específicos 19

1.3. Objetivos de la investigación 19

1.3.1. Objetivo general 19

1.3.2. Objetivos específicos 20

2. Marco teórico **21**

2.1. Antecedentes de la investigación 21

2.2. Bases teóricas 22

2.3. Definiciones conceptuales 75

2.4. Formulación de la hipótesis 75

2.4.1. Hipótesis general 75

2.4.2. Hipótesis específicas 76

3. Metodología **77**

3.1. Diseño metodológico 77

3.1.1. Tipo 77

3.1.2. Enfoque 78

3.2. Población y muestra 78

3.3. Operacionalización de variables e indicadores 78

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos 79

3.4.1. Técnicas a emplear 79

3.4.2. Descripción de los instrumentos 80

3.5. Técnicas para el procesamiento de la información 80

4. Resultados **81**

4.1. El multifuntor representable $\mathcal{P}(q^n; \cdot)$ 81

4.2. Resultado principal de la tesis 83

5. Discusión, conclusiones y recomendaciones **87**

5.1. Discusión 87

5.2. Conclusiones 88

5.3. Recomendaciones 88

6. Fuentes de información **89**

6.1. Fuentes bibliográficas 89

6.2. Fuentes hemerograficas 91

6.3. Fuentes documentales 92

6.4. Fuentes electrónicas 92

7. Anexos **93**

7.1. Matriz de consistencia 93

Resumen

En esta tesis demostramos el teorema de Yoneda en el contexto de las multicategorías planas. Para ello primero revisamos los conceptos categóricos necesarios que nos permiten entender el Teorema de Yoneda en las categorías ordinarias en el sentido de Mac Lane-Eilenberg. Posteriormente revisamos de manera breve el concepto de árbol que nos provee de un lenguaje gráfico para las multicategorías. Finalmente extendemos éstas ideas y conceptos categóricos al contexto de las multicategorías planas para probar el resultado principal de la tesis.
Palabras clave: Teorema de Yoneda,concepto de árbol, multicategorias planas, categorías ordinarias.

Abstract

In this thesis we show Yoneda's Theorem in the context of the plane multicategories. To do this we first check categorical concepts needed to help us understand the Yoneda Theorem in ordinary categories in the sense of Eilenberg-Mac Lane. Subsequently performed briefly the concept of tree that provides us with a graphical language for multicategories. Finally we extend these ideas and categorical concepts the context of the plane multicategories to prove the main result of the thesis.
Keywords: Yoneda's Theorem, concept of tree, plane multicategories, ordinary categories.

Introducción

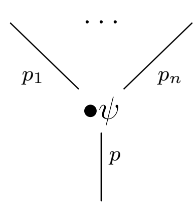
Los matemáticos , en su labor diaria , están en constante búsqueda de teorías que generalicen teoremas clásicos , por ejemplo el matemático Andrew Wiles demostró que no existen números enteros x, y, z que satisfagan la ecuacion $x^n + y^n = z^n$ para valores enteros $n \geq 3$ (conocido como el ultimo teorema de Fermat), que es un resultado que generaliza el caso $n = 3$ demostrado por Leonhard Euler. Asimismo es bien conocido que no solo generalizan teoremas sino también definiciones y conceptos como es el caso de la noción de derivada , así en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ tenemos la definición: sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo abierto I, y sea $c \in I$, entonces la derivada de f en c se define como el limite

$$f^{'}(c) = \lim_{x \to c}(\frac{f(x) - f(c)}{x - c})$$

mientras que la derivada para funciones en $\mathbb{R}^n$ se define como: sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $c \in U$, entonces f es derivable en c si existe una transformación lineal $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{x \to c} \frac{\parallel f(x) - (L(x - c) + f(c)) \parallel}{\parallel x - c \parallel} = 0$$

A simple vista esta generalización parece algo extraña, pero si se hace algunas pequeñas modificaciones podemos ver que el caso real es cuando tomamos $n = m = 1$. Así existen infinidad de generalizaciones, tanto de teoremas como de conceptos. En esta tesis vamos a aportar un caso mas , a saber un teorema que se desarrolla en la teoría de categorías. A grandes rasgos la teoría de categorías nace en 1945 de la mano de los matematicos Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en su teoría de transformaciones naturales. La aplicación del álgebra a la geometría había forzado a Eilenberg y Mac Lane a crear su teoría general. Aquí en esta teoría se prueba un resultado muy importante , a saber el famoso teorema de Yoneda, que establece principalmente una biyección entre $Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F)$ y FA, donde $\mathcal{C}(A, \cdot), F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ son funtores, el primero de ellos es llamado *funtor representable* y A es un objeto de la categoría $\mathcal{C}$. En el año de 1969 J. Lambek introduce el concepto de *multicategoría.* La principal diferencia entre una categoría y una multicategoría radica en el hecho de que en una multicategoría tenemos una cadena finita de objetos como dominio, mientras que en una categoría sólo tenemos un sólo objeto como dominio. De esta manera un morfismo u *operación* en una multicategoría se puede ver gráficamente como :



Entonces lo que pretendemos hacer en esta tesis es probar el teorema de Yoneda pero generalizándolo al caso de las malticategorias, para ser mas precisos ,a las multicategorias planas. Para dicho propósito la clave de todo el trabajo esta en re-definir los conceptos de la teoría de categorías clásica y llevarlas a dimensiones superiores de manera correcta, de esa forma es posible , tanto formular , en el nuevo lenguaje, el teorema como también dar una correcta demostración.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Descripción de la realidad problemática

Nobuo Yoneda prueba un resultado importante dentro de la teoría de categorías que lleva su nombre, a saber, el famoso "Lema de Yoneda", que establece principalmente una biyección entre $Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F)$ y FA, donde $\mathcal{C}(A, \cdot), F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ son funtores, el primero de ellos es llamado *funtor representable* y A es un objeto de la categoría $\mathcal{C}$. Más formalmente tenemos el siguiente teorema:

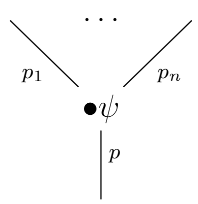
Considere un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ desde una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ a la categoría de conjuntos y funciones, un objeto A de $\mathcal{C}$ y su correspondiente funtor representable $\mathcal{C}(A, \cdot) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Existe una correspondencia biyectiva

$$\theta_{F,A} : Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F) \cong FA$$

entre las transformaciones naturales de $\mathcal{C}(A, \cdot)$ a F y los elementos del conjunto FA; en particular esas transformaciones naturales constituyen un conjunto. Aún más, si $\mathcal{C}$ es pequeña las biyecciones $\theta_{F,A}$ constituyen una transformación natural en la variable F; también las biyecciones $\theta_{F,A}$ constituyen una transformación natural en la variable A.

Este teorema tiene muchas implicaciones en la propia teoría de categorías, así como también en la filosofía de la matemática.

En el año de 1969 J. Lambek en [Lambek,1969] introduce el concepto de *multicategoría* en el contexto de la lógica y la lingüística. La principal diferencia entre una categoría y una multicategoría radica en el hecho de que en una multicategoría tenemos una cadena finita de objetos como dominio, mientras que en una categoría sólo tenemos un sólo objeto como dominio. De esta manera un morfismo u *operación* en una multicategoría se puede ver gráficamente como :



Una pregunta natural que surge cuando estudiamos multicategorías es pues si el teorema de Yoneda, mutatis mutandis, se sigue cumpliendo aquí. La razón principal por la que se generaliza el teorema a dimensiones superiores es *buscar estructuras generales*, trabajo que se hace muy seguido en el área de teoría de categorías, que engloben muchos teoremas clásicos como casos particulares y ver cómo es que se usa un lenguaje de mayor expresión cada vez que se va subiendo de dimension.

Esta tesis esboza una forma de dar una respuesta positiva a tal pregunta.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

Probar que el teorema de Yoneda se cumple también para dimensiones superiores.

1.2.2. Problemas específicos

• Encontrar un lenguaje gráfico que me permita dilucidar los conceptos de la teoría de multicategorías.
• Extender los conceptos de la teoría de categorías a la teoría de multicategorías .
• Construir un multifuntor representable para las multicategorias planas.

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Demostrar que el teorema de Yoneda se sigue cumpliendo en las multicategorías planas y ver cómo la expresión del lenguaje se hace cada vez mas complejo a medida que se va generalizando el teorema.

1.3.2. Objetivos específicos

• Entender el concepto de *árbol*, que está dentro de la teoría de grafos, pues gracias a este concepto podremos construir esquemas gráficos que nos permitan entender con mayor claridad las multicategorías y sus axiomas.
• Extender los conceptos de la teoría de categorías, tales como *funtor*, *transformación natural*, etc a la teoría de multicategorías de tal manera que podamos formular con precisión el teorema de yoneda para multicategorías planas.
• Construir un multifuntor representable para las multicategorias planas.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Antecedentes de la investigación

Los principales antecedentes de esta tesis se describe de manera breve a continuación:

El filósofo y matemático J. Lambek en [Lambek,1969] introduce las multicategorías en el contexto de la lógica y linguística, inicialmente como un *modelo* para la lógica lineal. Posteriormente M. E. Szabo en [Szabo,1975] introduce las policategorías como una generalización del concepto de multicategoría que a su vez generaliza el concepto de categoría inventado por Mac Lane y Eilenberg en su articulo original [Eilenberg and MacLane,1945] . Aquí en la teoría original de categorías el matemático japonés Nobuo Yoneda descubre una curiosa biyeccion entre dos conjuntos llegando a lo que hoy se conoce como el *Teorema de Yoneda*. Los primeros indicios de extender el teorema de Yoneda para el caso de las multicategorias se da en el capítulo 2 (página 34) de la tesis doctoral de Ittay Weiss titulado: "Dendroidal Sets" (ver [Weiss,2007]), en dicha tesis Weiss provee una prueba en la que usa conceptos sofisticados de la teoría de "Operads", aquí en esta tesis mostraremos una prueba elemental de dicho resultado , extendiendo los conceptos originales al caso de las multicategorias, de tal forma que se conserve la estructura.

2.2. Bases teóricas

- **PRELIMINARES CATEGÓRICOS**

Una categoría es una especie de estructura algebraica que consiste en objetos y morfismos (o flechas) entre objetos satisfaciendo unos cuantos axiomas necesarios. En este apartado hacemos un estudio de los conceptos básicos de la teoría de categorías, tales como: el mismo concepto de categoría, funtores, transformaciones naturales, etc. junto con una variedad de ejemplos que permiten dilucidar dichos conceptos. Discutimos también el famoso resultado de Nobuo conocido como teorema de Yoneda y hacemos una breve introducción al concepto de limites y colimites, todos estos conceptos los podemos encontrar en [Awodey,2010], [Borceux,], [Adàmek et al.,2004] o [Mac Lane, 2013].

Antes de proveer una definición formal de categoría es necesario hacer unos comentarios sobre sus fundamentos teórico-conjuntistas (para profundizar en el tema ver [Artin et al.,1972] o [Lane,1996]) Es muy común en teoría de categorías enfrentarnos a muy grandes colecciones como "todos los conjuntos", "todos los espacios vectoriales", o "todos los espacios topologicos". Sabemos que estas entidades no se pueden considerar como conjuntos. Por ejemplo si $\mathcal{U}$ representa al conjunto de todos los conjuntos , entonces el subconjunto $A = \{x | x \in \mathcal{U} \ y \ x \notin x\}$ de $\mathcal{U}$ tendría la propiedad de que $A \in A$ si y solo si $A \notin A$ (paradoja de Russell). Por ello es fundamental hacer una diferencia entre las palabras conjuntos y clases que aquí no se trataran de manera técnica, simplemente haremos un pequeño comentario sobre ello.

En forma general los *conjuntos* pueden ser considerados como los conjuntos habituales de la teoría intuitiva de conjuntos (o alguna teoría axiomática de conjuntos).

En particular, es necesario que las siguientes construcciones se puedan realizar con los conjuntos:

(1) Para cada conjunto X y cada "propiedad" P , podemos formar el conjunto $\{x \in X | P(x)\}$ de todos los elementos de X que satisfacen la propiedad P.

(2) Para cada conjunto X podemos formar el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X (llamado conjunto potencia de X).

(3) Para cualquier par de conjuntos X e Y, podemos formar los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto $\{X, Y\}$ cuyos elementos son exactamente X e Y.

(b) El par (ordenado) (X, Y) con la primera coordenada X y la segunda coordenada Y.

(c) La unión $X \cup Y = \{x | x \in X \ o \ x \in Y\}$

(d) La intersección $X \cap Y = \{x | x \in X \ y \ x \in Y\}$

(e) El producto cartesiano $X \times Y = \{(x, y) | x \in X \ e \ y \in Y\}$

(f) El complemento relativo $X \setminus Y = \{x | x \in X \ y \ x \notin Y\}$

(g) El conjunto Y^X de todas las funciones $f : X \to Y$ de X a Y

(4) Para cualquier conjunto I y una familia $(X_i)_{i \in I}$ de conjuntos , podemos formar los siguientes conjuntos:

(a) La imagen $\{X_i | i \in I\}$ de la función de indexacion.

(b) La unión $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x | x \in X_i \ para \ algun \ i \in I\}$

(c) La intersección $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x | x \in X_i \ para \ todo \ i \in I\}$

(d) El producto cartesiano $\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i | f(i) \in X_i \ para \ cada \ i \in I\}$

(e) La unión disjunta $\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$

Los requisitos anteriores implican que cada espacio topologico es un

conjunto. Análogamente cada espacio vectorial, etc. sin embargo, por medio de las construcciones anteriores no podemos formar "el conjunto de todos los conjuntos", o "el conjunto de todos los espacios vectoriales", etc. para ello necesitamos el concepto de *clase* que ha sido creado justamente para hacer frente a las " grandes colecciones de conjuntos ". En particular , es necesario que:
(1) Los elementos de casa clase sean conjuntos.
(2) Por cada " propiedad " $\mathcal{P}$ se puede formar la clase de todos los conjuntos con la propiedad $\mathcal{P}$.
(3) Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son clases, también lo es la n-upla $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, y
(4) Cada conjunto es una clase (lo que es equivalente: todos los miembros de un conjunto es un conjunto)

Por lo tanto los conjuntos son clases especiales. Las clases que no son conjuntos se denominan *clases propias.* También el universo $\mathcal{U}$, la clase de todos los grupos, la clase de todos los espacios vectoriales son clases propias. Tenga en cuenta que "no existe ninguna función sobreyectiva de un conjunto a una clase propia", esto significa que cada conjunto debe tener "menos" elementos que cualquier clase propia.
Por lo tanto, los conjuntos también se llaman *clases pequeñas* , y las clases propias se denominan *clases grandes*, esta distinción entre " grandes" y " pequeñas" resulta ser fundamental para muchas consideraciones categóricas. El marco de conjuntos y clase que hemos descrito de manera sucinta aquí es suficiente para definir e investigar las entidades como la categoría de conjuntos , la categoría de grupos, la categoría de espacios vectoriales, etc. funtores entre categorías, y las transformaciones naturales entre dichos funtores.

Ahora si una vez dicho esto, podemos empezar definiendo lo que es una categoría:

Definición 2.2.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ consta de :

(i) una colección $\mathcal{C}_0$ (o $Ob(\mathcal{C})$) de *objetos* denostado por $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$ o $a, b, c, \ldots$
(ii) una clase $\mathcal{C}_1$ de *flechas* o *morfismos* denotado por $f, g, h, \ldots$. Para cada flecha f están asociados un único objeto $s(f)$ y un único objeto $t(f)$, el *origen* (dominio) y *destino* (codominio) de f. Denotamos por $\mathcal{C}(A, B)$ al conjunto de flechas que tienen origen A y destino B,
(iii) para cada objeto A existe una flecha $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ la *identidad* de A,
(iv) para todo objeto A, B, C una ley de composición

$$\circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, C)$$

donde dado el par (g, f) de flechas, le enviamos una nueva flecha, su composición, que denotamos por $g \circ f$ o simplemente gf.
Estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:
1. Asociatividad: dado flechas $h \in \mathcal{C}(C, D)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$, entonces

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

2. identidad: para toda flecha $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$ se tiene

$$1_B \circ f = f$$

y

$$g \circ 1_B = g$$

Observaciones

Si $\mathcal{C}$ es una categoria, entonces:

1. La clase de morfismos de $\mathcal{C}$ (denotado por $Mor(\mathcal{C})$) se define como la unión de todos los conjuntos $\mathcal{C}(A, B)$ en $\mathcal{C}$.
2. Un morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ a menudo se representa por la notación $f : A \to B$.
3. Es conveniente y habitual suponer que $\mathcal{C}(A, B)$ son disjuntos para pares distintos (A, B), es decir, si $(A, B) \neq (A_1, B_1)$ entonces $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A_1, B_1) =$

$\emptyset$.

4. La composición , $\circ$, es una operacion binaria parcial en la clase $Mor(\mathcal{C})$. Para un par (f, g) de morfismos, $g \circ f$ se define si y solo si el origen de g y el destino de f coinciden.

Ahora mostraremos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2.1. (1) La categoria **Set** cuya clase de objetos es la clase de todos los conjuntos; $\mathbf{Set}(A, B)$ es el conjunto de las funciones de A a B, 1_A es la fucnion identidad en A, y $\circ$ es la composición usual de funciones.

(2) La categoría **Vec** cuyos objetos son los espacios vectoriales reales y cuyos morfismos son todas las transformaciones lineales entre ellos.

(3) La categoría **Grp** cuyos objetos son los grupos y morfismos todos los homomorfismos entre ellos.

(4) La categoría **Top** cuyos objetos son los espacios topologicos y morfismos todas las funciones continuas entre ellos.

(5) La categoría **Rel** cuyos objetos son pares (X, ρ) donde X es un conjunto y ρ es una relación binaria en X. Los morfismos $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ son aplicaciones que preservan las relaciones , es decir, funciones $f : X \to Y$ tal que $x \; \rho \; x^{'} \Rightarrow f(x) \; \sigma \; f(x^{'})$.

(6) La categoría **Mat** cuyos objetos son todos los números naturales, y para el cual $\mathbf{Mat}(m, n)$ es el conjunto de matrices reales $m \times n$, $1_n : n \to n$ es la matriz unidad diagonal $n \times n$, y la composición de matrices es definido por $A \circ B = BA$, donde BA denota la multiplicacion usual de matrices.

(7) Para cada clase X , es posible construir una categoria , llamada *categoria discreta* correspondiente a X y denotado por $\mathcal{C}_X$, de la siguiente manera: los objetos de $\mathcal{C}_X$ son justamente los elementos de X, y cuyos únicos morfismos son las identidades

$$\mathcal{C}_X(x,y) = \begin{cases} \emptyset, \text{ si } \ x \neq y, \\ \{1_x\}, \text{ si } \ x = y. \end{cases}$$

(8) Cada monoide $(M, \cdot, e)$, es decir, cada semigrupo $(M, \cdot)$ con unidad, e , puede ser visto como una categoría $\mathcal{M}$ con un único objeto, de la siguiente manera: *Ob* $\mathcal{M} = \{M\}$, $\mathcal{M}(M,M) = M$ donde $1_M = e$ y $y \circ x = y \cdot x$, así los axiomas de la definición 2.2.1 se satisfacen en virtud de la estructura del monoide.

(9) Cada clase pre-ordenada, es decir, para todo par $(X, \preceq)$ donde X es una clase y $\preceq$ es una relación reflexiva y transitiva en X , da lugar a una categoría $\mathcal{C}_{(X,\preceq)}$, los objetos don los elementos de X y los morfismos se definen como:

$$\mathcal{C}_{(X,\preceq)}(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, \text{ si } \ x \preceq y, \\ \emptyset, \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde $1_x = (x,x)$ y $(y,z) \circ (x,y) = (x,z)$. Observe que el morfismo identidad y la composición de morfismos de la categoría $\mathcal{C}_{(X,\preceq)}$ se definen gracias a las propiedades de $\preceq$.

(10) **Set** $\times$ **Set** es la categoría que tiene como objetos a pares de conjuntos (A, B) , como morfismos de (A, B) a (C, D) todos los pares de funciones (f, g) con $f : A \to C$ y $g : B \to D$, identidades dadas por $1_{(A,B)} = (1_A, 1_B)$, y la composición definida por $(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) = (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1)$.

Del mismo modo para cualquier categoría $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ uno puede formar la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, o, mas generalmente , para un número finito de categorías $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \cdots, \mathcal{C}_n$ se puede formar la categoría producto $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ (ésta construcción se puede hacer formalmente por inducción matemática).

Observaciones

1. Note que para tener una categoría $\mathcal{C}$, es necesario justificar la clase de objetos, la clase de morfismos, la flecha identidad y la ley de composición que se define en la clase de morfismos. Es por esta razón que , en algunos textos, se define una categoría $\mathcal{C}$ como un cuádruple $\mathcal{C} = (ob(\mathcal{C}), hom, id, \circ)$
2. Los morfismos en una categoría por lo general se indican con letras minúsculas, las letras mayúsculas son reservadas para los objetos. El morfismo $h = g \circ f$ algunas veces se denota por $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ o diciendo que el triángulo :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Conmuta. Del mismo modo,la afirmación de que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

Conmuta , significa que $g \circ f = k \circ h$

3. El orden de escribir las composiciones puede parecer al revés. Sin embargo , se trata del hecho de que en muchos ejemplos conocidos , la ley de composición es la composición de funciones.
4. Tenga en cuenta que debido a la asociatividad de la composición, la notación $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ no admite ambigüedad.

Construcciones básicas en categorías

A partir de una determinada categoria $\mathcal{C}$, se puede construir nuevas categorias de "diagramas en $\mathcal{C}$". Mostraremos aquí algunas construcciones básicas:

1. Dada una categoría $\mathcal{C}$, fijemos un objeto $I \in Ob(\mathcal{C})$. Formemos la categoría $\mathcal{C}/I$ de "flechas o morfismos sobre I"de la siguiente manera:

(a) Los objetos de $\mathcal{C}/I$ viene dado por $\mathcal{C}(X, I)$ con $X \in Ob(\mathcal{C})$, es decir los objetos son morfismos con codominio I.

(b) Dados $f : A \longrightarrow I$, $g : B \longrightarrow I$ objetos de $\mathcal{C}/I$, definimos: $\mathcal{C}/I(f, g) = \{h \in \mathcal{C}(A, B) \mid g \circ h = f\}$. Claramente , dado $f : A \longrightarrow I$, es fácil ver que $1_f = 1_A$.

(c) Dados $f : A \longrightarrow I$, $g : B \longrightarrow I$, $h : C \longrightarrow I$ objetos de $\mathcal{C}/I$. Definimos $\bullet : \mathcal{C}/I(f, g) \times \mathcal{C}/I(g, h) \longrightarrow \mathcal{C}/I(f, h)$ por $(p, q) \longmapsto q \bullet p$, donde claramente conviene tomar $q \bullet p = q \circ p$, de esta manera la ley de composicion de $\mathcal{C}/I$ es la inducida de $\mathcal{C}$.

2. Nuevamente fijemos un objeto $I \in Ob(\mathcal{C})$ y definamos la categoría $I/\mathcal{C}$ de "flechas o morfismos desde I".

(a)Objetos: los mosrfismos de $\mathcal{C}$ con dominio I.

(b) Los Morfismos del objeto $f : I \longrightarrow A$ al objeto $g : I \longrightarrow B$ son los morfismos $h : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$ tal que $h \circ f = g$, la ley de composicion es inducida por la de $\mathcal{C}$.

3. La categoría $Arr(\mathcal{C})$ de morfismos de $\mathcal{C}$ tiene por objetos a todos los morfismos de $\mathcal{C}$; una flecha del objeto $(f : A \longrightarrow B)$ al objeto $(g : C \longrightarrow D)$ es un par $(h : A \longrightarrow C, k : B \longrightarrow D)$ de morfismos de $\mathcal{C}$ con la propiedad $k \circ f = g \circ h$. Nuevamente la ley composición es puntualmente inducida por la composición en $\mathcal{C}$, es decir, dados dos morfismos (h, k) y (h', k'), se tiene $(h, k) \bullet (h', k') = (h \circ h', k \circ k')$, donde $\bullet$ y $\circ$ son las leyes de composición en las categorías $Arr(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C}$ respectivamente.

4. Dada una categoría $\mathcal{C}$, formaremos la categoría $\mathcal{C}^{op}$, llamada la *categoría dual* de $\mathcal{C}$, de la siguiente manera:

(a) Los objetos de $\mathcal{C}^{op}$ son exactamente los mismos que los de $\mathcal{C}$.

(b) Para todos los objetos A, B de $\mathcal{C}^{op}$, definimos $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$ (los morfismos de $\mathcal{C}^{op}$ son los de $\mathcal{C}$ "escrita en dirección inversa", para evitar confusiones , vamos a escribir $f^{op} : A \longrightarrow B$ para el morfismo de $\mathcal{C}^{op}$ que corresponde

al morfismo $f : B \longrightarrow A$ de $\mathcal{C}$).
(c) La ley de composición de $\mathcal{C}^{op}$ esta dada por $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$. Es fácil ver que $\mathcal{C}^{op}$ así definida es efectivamente una categoría, en el sentido de que se cumplen los axiomas de la definición 2.2.1
Mostramos ahora una proposición sencilla que se deduce de la construcción de la categoría $\mathcal{C}^{op}$:

Proposición 2.2.2. Sea $\mathcal{C}^{op}$ la categoria dual de $\mathcal{C}$, entonces se cumple lo siguiente:
(I) $\mathcal{C}^{op}$ es la categoria con los mismos morfismos identidades que $\mathcal{C}$.
(II) $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$

Demostración. (I) Como $\mathcal{C}$ es una categoría, para cada $A \in \mathcal{C}$ existe $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ tal que $f \circ 1_A = f$, para cualquier $f \in \mathcal{C}(A, B)$. De manera similar para $A \in \mathcal{C}^{op}$, existe $1_A^{op} \in \mathcal{C}^{op}(A, A)$ y es tal que $1_A^{op} \circ f^{op} = f^{op}$ para $f^{op} \in \mathcal{C}^{op}(B, A)$. Considerando que $\mathcal{C}^{op}(A, A) = \mathcal{C}(A, A)$, tomando $B = A$ y $f = 1_A^{op}$, entonces $1_A^{op} \circ 1_A = 1_A^{op}$; y tomando $B = A$ y $f^{op} = 1_A$, $1_A^{op} \circ 1_A = 1_A$, por lo tanto $1_A^{op} = 1_A$.
(II) Claramente, de la definición, tenemos: $Ob\,(\mathcal{C}^{op})^{op} = Ob\,\mathcal{C}$ y $(\mathcal{C}^{op})^{op}(A, B) = \mathcal{C}^{op}(B, A) = \mathcal{C}(A, B)$ para todo A, B en $\mathcal{C}$. También notamos que la ley de composición de $(\mathcal{C}^{op})^{op}$ es el mismo que el de $\mathcal{C}$. Así $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

■

Ahora mostramos algunos objetos y morfismos importantes en una categoría.

Definición 2.2.3. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ es un *isomorfismo* si existe $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$. Decimos que g es una inversa de f.

Si existe un isomorfismo $X \longrightarrow Y$, decimos que X es isomorfo a Y y escribimos $X \simeq Y$.

Proposición 2.2.4. Si g_1 y g_2 son inversas de f, entonces $g_1 = g_2$

Demostración. Basta con observar los siguiente:
$g_1 = g_1 \circ 1_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = 1_X \circ g_2 = g_2$.

■

Proposición 2.2.5. En una categoría se cumple lo siguiente:
(I) El morfismo identidad es un isomorfismo.
(II) La composicion de dos isomorfismos es un isomorfismo.

Demostración. (I) 1_X es claramente su propio inverso. Pues $1_X \circ 1_X = 1_X$
(II) Sea $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$, $g \in \mathcal{C}(X, Y)$ dos isomorfismos, con respectivos inversos $h \in \mathcal{C}(Z, Y)$, $k \in \mathcal{C}(Y, X)$. Entonces $f \circ g \in \mathcal{C}(X, Z)$ es un isomorfismo, cuyo inverso es $k \circ h$. En efecto, tenemos

$$(f \circ g) \circ (k \circ h) = f \circ (g \circ k) \circ h = f \circ 1_Y \circ h = f \circ h = 1_Z$$

De forma similar , tenemos:

$$(k \circ h) \circ (f \circ g) = k \circ (h \circ f) \circ g = k \circ 1_Y \circ g = k \circ g = 1_X$$

Esto concluye la prueba. ■

Definición 2.2.6. Un *objeto terminal* en una categoria $\mathcal{C}$ es un elemento $T \in Ob(\mathcal{C})$ tal que para todo objeto X, existe un unico morfismo $k : X \longrightarrow T$

Por ejemplo en la categoría **Set**, cada conjunto unitario es terminal.

Proposición 2.2.7. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si existe un objeto terminal en $\mathcal{C}$ entonces es único salvo isomorfismo.

Demostración. Supongamos que T y $T^{'}$ son ambos objetos terminales. Si T y $T^{'}$ ambos son iguales , entonces se termina la prueba, caso contrario mostraremos que existe un isomorfismo $f : T \longrightarrow T^{'}$.
Ya que $T^{'}$ es terminal, existe un único morfismo $f : T \longrightarrow T^{'}$, de manera similar , ya que T es terminal , entonces existe un único morfismo $g : T^{'} \longrightarrow T$. Consideremos ahora la composición $g \circ f \in \mathcal{C}(T, T)$. Como T es terminal, existe un único morfismo $T \longrightarrow T$, es decir, la identidad, luego $g \circ f = 1_T$, de manera similar, $f \circ g = 1_{T'}$. Por lo tanto f es el isomorfismo deseado. ■

Definición 2.2.8. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un morfismo $m : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{C}$ es un *monomorfismo* si para todo objeto X de $\mathcal{C}$ y $f, g : X \rightrightarrows A$ morfismos de $\mathcal{C}$ se tiene que $m \circ f = m \circ g \Rightarrow f = g$.
Dualmente, un morfismo $e : A \longrightarrow B$ es un *epimorfismo* si para todo Y en $\mathcal{C}$ y $f, g : B \rightrightarrows Y$ morfismos de $\mathcal{C}$ se tiene que $f \circ e = g \circ e \Rightarrow f = g$

La siguiente proposición muestra que efectivamente los conceptos anteriores son duales:

Proposición 2.2.9. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.
(I) $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ es monomorfismo si y solo si $f^{op} \in \mathcal{C}^{op}(Y, X)$ es epimorfismo .
(II) $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ es epimorfismo si y solo si $f^{op} \in \mathcal{C}^{op}(Y, X)$ es monomorfismo.

Demostración. Probaremos primero la parte (I).
($\Rightarrow$) Sean $u^{op}, v^{op} \in \mathcal{C}^{op}(X, Z)$ tales que $u^{op} \circ f^{op} = v^{op} \circ f^{op}$, entonces para que f^{op} sea epimorfismo , debemos tener que $u^{op} = v^{op}$. En efecto, de la igualdad $u^{op} \circ f^{op} = v^{op} \circ f^{op}$, por definición se tiene $(f \circ u)^{op} = (f \circ v)^{op}$, de donde $f \circ u = f \circ v$, pero como f es monomorfismo , $u = v$, luego $u^{op} = v^{op}$.

($\Leftarrow$) Sean $u, v \in \mathcal{C}(W, X)$ tales que $f \circ u = f \circ v$, probemos que $u = v$. En efecto, de la igualdad $f \circ u = f \circ v$, se obtiene $u^{op} \circ f^{op} = v^{op} \circ f^{op}$. Como f^{op} es epimorfismo , se deduce que $u^{op} = v^{op}$, asi en $\mathcal{C}$ se obtiene que $u = v$.

Ahora probemos la parte (II).

($\Rightarrow$) Sean $u^{op}, v^{op} \in \mathcal{C}^{op}(H, Y)$ tal que $f^{op} \circ u^{op} = f^{op} \circ v^{op}$, entonces $(u \circ f)^{op} = (v \circ f)^{op}$, de donde $u \circ f = v \circ f$, pero por hipotesis, f es epimorfismo, luego $u = v$, lo que implica que $u^{op} = v^{op}$.

($\Leftarrow$) Sea $u, v \in \mathcal{C}(Y, P)$ tal que $u \circ f = v \circ f$. Entonces esto implica que $f^{op} \circ u^{op} = f^{op} \circ v^{op}$, pero por hipotesis f^{op} es monomorfismo, luego $u^{op} = v^{op}$, de donde $u = v$.

$\blacksquare$

Ahora mostramos algunas proposiciones elementales que se prueban sin dificultad.

Proposición 2.2.10. Las siguientes afirmaciones se cumplen:
(I) La composición $n \circ m$ de monomorfismos es un monomorfismo.
(II) La composición $n \circ m$ de epimorfismos es un epimorfismo.

Demostración. Vamos a probar primero (I)
Supongamos que $m : A \longrightarrow B$ y $n : B \longrightarrow C$ son monomorfismos. Entonces para cualquier par de morfismos $f, g : D \rightrightarrows A$, supongamos que $(n \circ m) \circ f = (n \circ m) \circ g$, entonces $n \circ (m \circ f) = n \circ (m \circ g)$, pero como n es monomorfismo, entonces $m \circ f = m \circ g$, pero m también es un monomorfismo, por lo tanto

$f = g$, luego la composición $n \circ m$ también es un monomorfismo.
Ahora probemos la parte (II): Sea $m : A \longrightarrow B$ y $n : B \longrightarrow C$ epimorfismos, entonces para cualquier par $f, g : C \rightrightarrows H$, supongamos que $f \circ (n \circ m) = g \circ (n \circ m)$, entonces $(f \circ n) \circ m = (g \circ n) \circ m$, por hipótesis m es epimorfismo, luego $f \circ n = g \circ n$, pero n también es epimorfismo, luego $f = g$. Por lo tanto la composición $n \circ m$ también es un epimorfismo.

■

Proposición 2.2.11. Sean f y g morfismos en una categoría $\mathcal{C}$, entonces
(I) Si $n \circ m$ es monomorfismo, entonces m es monomorfismo.
(II) Si $n \circ m$ es epimorfismo, entonces n es epimorfismo.

Demostración. Probemos primero la parte (I)
Supongamos que la composición $n \circ m$ es un monomorfismo, entonces para cualquier f, g la igualdad $(n \circ m) \circ f = (n \circ m) \circ g$ implica que $f = g$. Ahora supongamos que $m \circ f = m \circ g$, componiendo por la izquierda, tenemos : $n \circ (m \circ f) = n \circ (m \circ g)$, luego $(n \circ m) \circ f = (n \circ m) \circ g$, de donde por hipótesis $f = g$. Por lo tanto m es un epimorfismo.
Ahora probemos la parte (II): Si $n \circ m$ es un epimorfismo, entonces para cualquier par f, g , la igualdad $f \circ (n \circ m) = g \circ (n \circ m)$ implica que $f = g$.
Por otro lado, supongamos que $f \circ n = g \circ n$, componiendo por la derecha tenemos, $(f \circ n) \circ m = (g \circ n) \circ m$, de donde $f \circ (n \circ m) = g \circ (n \circ m)$, que por hipótesis implica que $f = g$. De esta manera n es un epimorfismo.

■

Ahora vamos a caracterizar los monomorfismos y epimorfismos en la categoría **Set** de conjuntos y funciones:

Proposición 2.2.12. Se cumplen las siguientes afirmaciones:

(I) f es un monomorfismo en **Set** si y solo si f es inyectiva.

(II) f es un epimorfismo en **Set** si y solo si f es sobreyectiva.

Demostración. Probaremos primero (I).

($\Leftarrow$) Supongamos que la funcion $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva. Dadas dos funciones $u, v : W \rightrightarrows X$ con $fu = fv$, probemos que $u = v$. En efecto, como $fu = fv$, para $w \in W$ se tiene $fu(w) = fv(w)$, como f es inyectiva, entonces $u(w) = v(w)$, luego $u = v$ y asi f es un monomorfismo.

($\Rightarrow$) Si f es un monomorfismo y $f(x_1) = f(x_2)$, probemos que $x_1 = x_2$. En efecto, sea $\{*\}$ un conjunto unitario y definamos las funciones $u, v : \{*\} \longrightarrow X$ como $u(*) = x_1$ y $v(*) = x_2$. Entonces $fu = fv$ implica $u = v$, es decir $x_1 = x_2$.

Ahora probaremos (II)

($\Rightarrow$) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un epimorfismo y razonemos por el absurdo, es decir, supongamos que f no es sobreyectiva. Para obtener una contradicción, construyamos dos funciones $u, v : Y \rightrightarrows W$ que satisfagan $uf = vf$ pero que $u \neq v$. Para ello tomamos $W = \{0, 1\}$. Como f no es sobreyectiva, entonces existe $y_0 \in Y - f(X)$. Definamos $u : Y \longrightarrow W$ por $u(y) = 0$ para todo $y \in Y$y definamos $v : Y \longrightarrow W$ por :

$$\begin{cases} v(y) = 0, \text{ si } \; y \neq y_0, \\ v(y) = 1, \text{ si } \; y = y_0. \end{cases}$$

Claramente $uf = vf$, pero $u \neq v$ y esto es una contradicción pues f es un epimorfismo.

($\Leftarrow$) Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es sobreyectiva y $uf = vf$, entonces como f es sobreyectiva , para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$, luego $u(y) = u(f(x)) = v(f(x)) = v(y)$ para todo $y \in Y$, de donde $u = v$, por lo tanto f es un epimorfismo.

■

Observación Si $i : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo , entonces es un monomorfismo y un epimorfismo. En efecto, si $j : B \longrightarrow A$ es su inversa , entonces de $i \circ f = i \circ g$, componiendo j por la izquierda , obtenemos:
$i \circ f = i \circ g \Rightarrow j \circ (i \circ f) = j \circ (i \circ g) \Rightarrow (j \circ i) \circ f = (j \circ i) \circ g \Rightarrow 1_A \circ f = 1_A \circ g \Rightarrow f = g$, por lo tanto i es un monomorfismo. Un razonamiento análogo muestra que i también es un epimorfismo.

Definición 2.2.13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{C}$. Si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = 1_A$, decimos que f es un *monomorfismo split.* Si existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$, decimos que f es un *epimorfismo split.*

La siguiente proposición, nos dice que en la condición de monomorfismo y epimorfismo split podemos reemplazar la identidad por una flecha arbitraria:

Proposición 2.2.14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{C}$, entonces f es un monomorfismo split si y solo si para todo Y de $\mathcal{C}$ y morfismo $q : A \longrightarrow Y$ existe $g : B \longrightarrow Y$ tal que $g \circ f = q$

Demostración. Sea f un monomorfismo split. Sea $h : B \longrightarrow A$ tal que $h \circ f = 1_A$. Dado $Y \in \mathcal{C}$ y $q : A \longrightarrow Y$, se deduce que , componiendo h y q, existe $g = q \circ h : B \longrightarrow Y$, ademas $g \circ f = q \circ h \circ f = q \circ 1_A = q$.
Recíprocamente, en dichas condiciones, tomando $Y = A$ y $q = 1_A$, se deduce que f es un monomorfismo split.

■

Dualmente, f es un epimorfismo split si y solo si para todo $X \in \mathcal{C}$ y

morfismo $q : X \longrightarrow B$,existe $g : X \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = q$.
Terminamos esta sección con dos proposiciones sencillas.

Proposición 2.2.15. Si $f : A \longrightarrow B$ es un monomorfismo split , entonces es un monomorfismo. De manera dual, si es un epimorfismo split, entonces es un epimorfismo.

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un monomorfismo split. Existe entonces $g : B \longrightarrow A$, tal que $g \circ f = 1_A$. Si $h_1, h_2 : X \rightrightarrows A$ son tales que $f \circ h_1 = f \circ h_2$, entonces $h_1 = g \circ f \circ h_1 = g \circ f \circ h_2 = h_2$, y por lo tanto f es un monomorfismo.

■

Proposición 2.2.16. Sea $f : A \longrightarrow B$. Si f es un epimorfismo split y un monomorfismo, entonces es un isomorfismo. De manera dual si f es un monomorfismo split y un epimorfismo, entonces es un isomorfismo.

Demostración. Sea f un monomorfismo , y sea $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = 1_B$. Se tiene $1_B \circ f = f$, es decir $f \circ g \circ f = f = f \circ 1_A$, y como f es monomorfismo, entonces $g \circ f = 1_A$, luego f es un isomorfismo cuya inversa es g.

■

Naturalmente se desea establecer relaciones entre diferentes categorías, para ello utilizamos una especie de "función generalizada" entre dos categorías que conserve la estructura, a tal función le llamaremos "funtor". Mas formalmente, tenemos la siguiente:

Definición 2.2.17. Un *funtor* F de una categoría $\mathcal{C}$ a una categoría $\mathcal{D}$, consta de los siguientes datos:
(1) Una función $Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{D})$ entres las clases de objetos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$; la

imagen de $A \in Ob(\mathcal{C})$ se escribe $F(A)$ o simplemente FA;
(2) para todo par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, una función $\mathcal{C}(A,B) \longrightarrow \mathcal{D}(FA,FB)$, la imagen de $f \in \mathcal{C}(A,B)$ se escribe $F(f)$ o Ff.
estos datos están sujetos a los siguientes axiomas:
(1) para todo par de morfismos $f \in \mathcal{C}(A,B), g \in \mathcal{C}(B,C)$, se cumple

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$$

(2) para todo objeto A en $\mathcal{C}$, se cumple $F(1_A) = 1_{FA}$.

A continuación mostraremos una serie de ejemplos de funtores.

Ejemplo 2.2.2. (1) Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, es posible construir un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ de la siguiente manera, $FA = A$ y $Ff = f$, para cada objeto A en $\mathcal{C}$ y cada $f \in \mathcal{C}(A,B)$, a dicho funtor se le conoce como *funtor identidad* y se le representa generalmente como $1_{\mathcal{C}}$.
(2) Formemos un funtor F : **Grp** $\longrightarrow$ **Set** de la categoría de los grupos a la categoría de los conjuntos. A cada grupo $(G,\cdot)$ le asignamos el conjunto subyacente G y a cada homomorfismo de grupo f le asignamos la correspondiente funcion f. Claramente F es un funtor, llamado *Forgetful functor* traducido *funtor de olvido.*
(3) Sean $(M,\cdot,e)$ y $(N,*,e^{'})$ dos monoides vistos como categorías. Sea F un homomorfismo de monoides de M a N ,entonces es fácil ver que F puede ser visto como funtor.
(4) Sean $\mathcal{C}_{(X,\preceq)}$ y $\mathcal{C}_{(Y,\sqsubseteq)}$ dos clases pre-ordenadas vistos como categorías y sea F una función monótona de X a Y, entonces es fácil ver que F es un funtor entre dichas categorías.
(5) Sea $(M,\cdot,e)$ un monoide y X un conjunto. Una acción del monoide sobre el conjunto X es una función $m : M \times X \longrightarrow X$ que satisface

$$m(a \cdot b, c) = m(a, m(b, c)) \text{ y } m(e, b) = b$$

generalmente a $m(a, b)$ se le denota por ab, así con esta notación , las condiciones antes descritas se pueden ver como

$$(a \cdot b)c = a(bc) \text{ y } eb = b$$

Formemos un funtor $F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbf{Set}$ de la siguiente manera: al único objeto $*$ en $\mathcal{M}$ le asignamos el conjunto $F* = X$, a cada morfismo $a \in \mathcal{M}(*, *)$ le asociamos la función $Fa \in \mathbf{Set}(X, X)$, es decir, $Fa : X \longrightarrow X$ que definiremos así: para cada $b \in X$, tenemos $Fa(b) = m(a, b) = ab$. Es fácil ver que F, así definido, satisfacen los axiomas de la definición 2.2.17.

(6) Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto fijo C en $\mathcal{C}$, se define un funtor

$$\mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

de $\mathcal{C}$ a la categoría de conjuntos poniendo primero $\mathcal{C}(C, -)(A) = \mathcal{C}(C, A)$, ahora bien , si $f : A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathcal{C}$, la hacemos corresponder la siguiente función:

$$\mathcal{C}(C, -)(f) :\doteq \mathcal{C}(C, f) : \mathcal{C}(C, A) \longrightarrow \mathcal{C}(C, B)$$

que definimos por la siguiente formula : $\mathcal{C}(C, f)(g) = f \circ g$ para un morfismo $g \in \mathcal{C}(C, A)$. Este funtor se le conoce como *funtor representable.*

(7) Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ y un objeto fijo B en $\mathcal{C}$, se define el *funtor constante* B como $\triangle_B : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ por $\triangle_B(A) = B$, $\triangle_B(f) = 1_B$, para todo objeto A en $\mathcal{C}$ y todo morfismo f de $\mathcal{C}$.

(8) Para cualquier entero positivo n el *funtor n-esima potencia*

$$S^n : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

esta dado por $X \mapsto S^n X = X^n$ y $(f : X \longrightarrow Y) \mapsto S^n(f) := f^n : X^n \longrightarrow Y^n$, donde $f^n(x_1, \cdots, x_n) = (f(x_1), \cdots, f(x_n))$

Ahora estudiaremos de manera breve las propiedades elementales de los funtores:

Proposición 2.2.18. Todos los funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ preservan isomorfismos; es decir, cuando $k : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo en $\mathcal{C}$, entonces Fk es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Demostración. Como $k : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo , entonces existe $k^{'} : B \longrightarrow A$, tal que $k \circ k^{'} = 1_B$ y $k^{'} \circ k = 1_A$. Tenemos que probar que $Fk : FA \longrightarrow FB$ es un isomorfismo, en efecto el morfismo $Fk^{'} : FB \longrightarrow FA$ en $\mathcal{D}$ actúa como inverso de Fk, pues: $Fk \circ Fk^{'} = F(k \circ k^{'}) = F1_B = 1_{FB}$. Para el otro caso, observe que $Fk^{'} \circ Fk = F(k^{'} \circ k) = F1_A = 1_{FA}$, esto concluye la prueba.

■

Proposición 2.2.19. Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ son funtores , entonces la composición $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, definido por $GF(f : A \longrightarrow B) := G(Ff) : G(FA) \longrightarrow G(FB)$, es un funtor.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$, como F es funtor , se sigue que $F1_A = 1_{FA}$ y $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. Aplicando G se deduce que: $GF1_A = G(F1_A) = G1_{FA} = 1_{GFA} = 1_{G(FA)}$. Por otro lado $GF(g \circ f) = G(Fg \circ Ff) = GFg \circ GFf$.

■

Ahora introducimos una definición que evitara contradicciones conjuntistas con respecto a la definición 2.2.1.

Definición 2.2.20. Una categoria $\mathcal{C}$ es llamada *categoria pequeña*, cuando su clase de objetos $Ob(\mathcal{C})$, es un conjunto.

En virtud de la proposición 2.2.19 , observamos que las categorías pequeñas y funtores entre ellas constituyen una categoría , al que se le denota por **Cat**.

Definición 2.2.21. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es *fiel* (respectivamente *pleno*) si para todo par de objetos A, B de $\mathcal{C}$, la función $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{D}(FA, FB)$ es inyectiva (respectivamente sobreyectiva).

Definición 2.2.22. Un *isomorfismo de categorías* es un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, tal que existe un funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ de manera que $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$.

Observación. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías pequeñas, un isomorfismo de categorías $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un isomorfismo en la categoria **Cat**.

Ahora introduciremos un concepto importante dentro de la teoría de categorías que le da a esta teoría identidad propia.

Definición 2.2.23. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathcal{J}$ una categoría pequeña. Un *diagrama de tipo* $\mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$ es un funtor $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$. La categoría $\mathcal{J}$ es la categoría de indices del diagrama.

Utilizaremos la notación $D_i := D(i)$ para todo objeto i de $\mathcal{J}$. Diremos que un diagrama $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ es *conmutativo*, o que conmuta, si para todo par de morfismos α, β de $\mathcal{J}$ con mismo dominio y codominio se tiene que

$D\alpha = D\beta$.

Observación Sea $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en una categoría $\mathcal{C}$, y sea $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Es claro que $F \circ D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en $\mathcal{D}$. Aun mas, si D es conmutativo, entonces $F \circ D$ también lo es.

Ejemplo 2.2.3. (1) Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con la relación $\preceq$ definida por $1 \preceq 2$, $2 \preceq 4$, $1 \preceq 4$, $1 \preceq 3$ y $3 \preceq 4$ de tal manera que $(X, \preceq)$ es un pre-orden.
La categoria asociada (ver ejemplo 2.2.1 (9)) puede representarse así:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\ 3 \arrow[r] & 4 \end{tikzcd}$$

(1.1)

Donde obviamos el morfismo $1 \longrightarrow 4$ por ser igual a las composiciones $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4$ y $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$.
Llamemos $\mathcal{J}$ a esta categoría. Ahora, si $\mathcal{C}$ es una categoría arbitraria, un diagrama de tipo $\mathcal{J}$ en $\mathcal{C}$ es un funtor $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$. Tal funtor nos provee cuatro objetos de $\mathcal{C}$ con ciertos morfismos, dispuestos como en (1.1), de tal manera que podemos representar gráficamente este diagrama de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "f_{12}"] \arrow[d, "f_{13}"'] & C_2 \arrow[d, "f_{24}"] \\ C_3 \arrow[r, "f_{34}"'] & C_4 \end{tikzcd}$$

(1.2)

La conmutatividad del diagrama significa en este caso $f_{34} \circ f_{13} = f_{24} \circ f_{12}$. Intuitivamente, podemos decir que la conmutatividad de un diagrama significa la independencia del camino elegido entre dos objetos.

Observación Diremos que (1.2) es un diagrama en $\mathcal{C}$, sin explicitar la categoria $\mathcal{J}$ ni el funtor $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$.
(2) Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es un funtor y $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son morfismos en $\mathcal{C}$, entonces $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. Esta condición se puede expresar mediante la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rr, bend left, "F(g\circ f)"] & FB \arrow[r, "Fg"] & FC \end{tikzcd}$$

(3) Si consideramos la categoría del ejemplo 2.2.1 (7) $\mathcal{C}_X$, entonces todo diagrama $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}_X$ es conmutativo. En efecto, si

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & j \end{tikzcd}$$

son morfismos de $\mathcal{J}$, entonces $D\alpha, D\beta \in \mathcal{C}(D_i, D_j)$ y como el conjunto $\mathcal{C}(D_i, D_j)$ es unitario , se tiene que $D\alpha = D\beta$.

La teoría de categorías se inició en 1945 con Eilenberg y Mac Lane's principalmente con la aparición del artículo “General theory of natural equivalences” . La noción de transformación natural es tan fundamental en teoría de categorías que en palabras de Mac Lane's , uno de los fundadores, “Yo no inventé las categorías para estudiar funtores; las inventé para estudiar transformaciones naturales".

Definición 2.2.24. Considere dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$. Una *transformación natural* $\alpha : F \Longrightarrow G$ es una funcion que asigna a cada objeto A en $\mathcal{C}$ un morfismo $\alpha_A : FA \longrightarrow GA$ en $\mathcal{D}$, de tal manera que satisface la siguiente *condición de naturalidad*: para todo morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

(1.3)

Observaciones (1) Una transformación natural $\alpha : F \Longrightarrow G$ también es definido como una clase de morfismos (llamados tambien *componentes de la transformacion natural*) $\{\alpha_A : FA \longrightarrow GA\}_{A \in \mathcal{C}}$ en $\mathcal{D}$ indexada por objetos de $\mathcal{C}$, que satisface la condición de naturalidad dada en la definición 2.2.24. (2) Tenga en cuenta que A y B son objetos en la categoría $\mathcal{C}$, mientras que todos los objetos y morfismos del diagrama (1.3) están en la categoría $\mathcal{D}$.

Ejemplo 2.2.4. (1) Consideremos el funtor $F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definido por: para cada conjunto X le asociamos $FX := P(X)$ (el conjunto potencia de X) y para cada función $f : X \longrightarrow Y$ le asociamos la función $Ff : P(X) \longrightarrow P(Y)$ definida así, si $A \subseteq X \Rightarrow Ff(A) = f(A) = \{f(a)|a \in A\} \subseteq Y$. Es fácil ver que F así definido es un funtor. Ahora formemos una transformación natural $\alpha : 1_{\mathbf{Set}} \Longrightarrow F$, es decir, una función que asigna a cada conjunto X de **Set** una función $\alpha_X : 1_{\mathbf{Set}}X \longrightarrow FX$, de tal manera que para toda función $f : X \longrightarrow Y$ se cumple $Ff \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ 1_{\mathbf{set}}f$, para ello basta definir $\alpha_X(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$.

(2) Sea $\mathcal{C}$ una categoría, A y B objetos fijos de $\mathcal{C}$ y $f : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{C}$. Sean $\mathcal{C}(B,-) : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Set** y $\mathcal{C}(A,-) : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Set** los funtores del ejemplo 2.2.2 (6). Formemos una transformación natural $\alpha : \mathcal{C}(B,-) \Longrightarrow \mathcal{C}(A,-)$ tal que para todo objeto C de $\mathcal{C}$ le asignemos la función $\alpha_C : \mathcal{C}(B,C) \longrightarrow \mathcal{C}(A,C)$ en **Set** dado por $\alpha_C(g) = g \circ f$ para todo $g \in \mathcal{C}(B,C)$.
(3) Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $b : B \longrightarrow B'$ un morfismo en $\mathcal{D}$, consideremos también los funtores constantes $\triangle_B : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $\triangle_{B'} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ (ver ejemplo 2.2.2 (7)). Definamos una transformación natural constante $\triangle_b : \triangle_B \Longrightarrow \triangle_{B'}$ dado por, para todo objeto A en $\mathcal{C}$ le asignamos el morfismo $b : B \longrightarrow B'$ en $\mathcal{D}$.
(4) Consideremos la categoría **Vec** donde el cuerpo que tomaremos es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Dado un espacio vectorial V en **Vec** , por álgebra lineal elemental, podemos formar un espacio vectorial a partir de V , a saber, el espacio dual denotado por V^* que no es mas que el conjunto de funcionales lineales $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ con las operaciones usuales. El procedimiento anterior puede repetirse para obtener el doble dual de V , a saber $V^{**} = (V^*)^*$. Ahora es sencillo formar un funtor F : **Vec** $\longrightarrow$ **Vec** que a cada espacio vectorial V le asigna su doble dual V^{**}. Considerando, por otro lado, el funtor identidad $1_{\mathbf{Vec}}$: **Vec** $\longrightarrow$ **Vec**, es fácil ahora mostrar una transformación lineal $\tau : 1_{\mathbf{Vec}} \Longrightarrow F$

Ahora damos unos resultados que muestran la existencia de una nueva categoría.

Proposición 2.2.25. 1. Dado un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, existe una transformación natural identidad $1_F : F \Longrightarrow F$ que a cada objeto A de $\mathcal{C}$ le asigna el morfismo identidad de FA.
2. Considere tres funtores $F, G, H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ y $\alpha : F \Longrightarrow G$, $\beta : G \Longrightarrow H$, dos transformaciones naturales. Entonces la fórmula $(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$ define una nueva transformacion natural $\beta \circ \alpha : F \Longrightarrow H$.

Demostración. (1) Para el objeto A, le asignamos $1_F A := 1_{FA} : FA \longrightarrow FA$, entonces para cualquier $f : A \longrightarrow B$, tenemos que $Ff \circ 1_{FA} = 1_{FB} \circ Ff$, así 1_F es una transformación natural.
(2) Como α y β son transformaciones naturales. Se tiene la siguiente situación: para todo objeto A en $\mathcal{C}$ y todo morfismo $f : A \longrightarrow B$, también en $\mathcal{C}$ se tiene : $Gf \circ \alpha_A = \alpha_B \circ Ff$ y $Hf \circ \beta_A = \beta_B \circ Gf$. Ahora observemos lo siguiente:

$$Hf \circ (\beta \circ \alpha)_A = Hf \circ (\beta_A \circ \alpha_A) = (Hf \circ \beta_A) \circ \alpha_A = (\beta_B \circ Gf) \circ \alpha_A =$$
$$\beta_B \circ (Gf \circ \alpha_A) = \beta_B \circ (\alpha_B \circ Ff) = (\beta_B \circ \alpha_B) = (\beta \circ \alpha)_B \circ Ff$$

Por lo tanto $\beta \circ \alpha : F \Longrightarrow H$ es una transformación natural.

■

En virtud de la proposición 2.2.25 se podría pensar que para dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se puede formar una nueva categoría denotado por $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ cuyos objetos son funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre dichos funtores. Pero según la definición 2.2.1 de categoría , para todo par de funtores $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$ la clase de transformaciones naturales $\{\alpha : F \Longrightarrow G\}$ debería ser un conjunto, pero esto en general no ocurre. Por ello ponemos una restricción a la categoría $\mathcal{C}$, a saber : que sea pequeña, de tal manera que la nueva categoría $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ no contradiga la definición 2.2.1. Aclarado este punto lógico, tenemos lo siguiente: sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una categoría arbitraria. Los funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ y las transformaciones naturales entre dichos funtores constituyen una categoría, que denotamos por $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ o $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Observación. La categoría $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ es pequeña, siempre y cuando la categoría $\mathcal{D}$ es pequeña.
Ahora damos una definición importante:

Definición 2.2.26. Dados dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$, una *equivalencia natural* o *isomorfismo natural* $\alpha : F \Longrightarrow G$ es un isomorfismo en la categoría $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, es decir, existe $\beta : G \Longrightarrow F$ tal que $\alpha \circ \beta = 1_G$ y $\beta \circ \alpha = 1_F$.

Si existe un isomorfismo natural $\alpha : F \Longrightarrow G$, se dice que F y G son *naturalemnte isomorfos*, y escribimos $F \cong G$.

Observación. Note que dos transformaciones naturales son iguales si y solo si lo son sus componentes.

Proposición 2.2.27. Consideremos dos funtores $F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$. Entonces $\alpha : F \Longrightarrow G$ es un isomorfismo natural si y solo si cada componente $\alpha_X : FX \longrightarrow GX$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.

Demostración. Supongamos que α es un isomorfismo natural, con inversa β. Entonces $\alpha \circ \beta = 1_G$, luego para todo objeto X en $\mathcal{C}$, se tiene $(\alpha \circ \beta)_X = (1_G)_X$ lo que implica $\alpha_X \circ \beta_X = 1_{GX}$, de la misma forma $\beta_X \circ \alpha_X = 1_{FX}$, de modo que β_X es un inverso de α_X para todo X en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, cada componente es un isomorfismo en $\mathcal{D}$.
Recíprocamente, si cada componente α_X es un isomorfismo , entonces que β_X sea su correspondiente inverso para cada X en $\mathcal{C}$. Entonces basta mostrar la existencia de una transformación natural $\beta : G \Longrightarrow F$. Para ello sea $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ un morfismo, entonces $Gf \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ Ff$. Por otro lado, tenemos $\beta_Y \circ Gf \circ \alpha_X \circ \beta_X = \beta_Y \circ \alpha_Y \circ Ff \circ \beta_X$, de donde $\beta_Y \circ Gf \circ 1_{GX} = 1_{FY} \circ Ff \circ \beta_X$, lo que implica $\beta_Y \circ Gf = Ff \circ \beta_X$.

∎

Equivalencia de categorías

La noción de isomorfismo de categorías es a menudo demasiado restrictiva, pues exige que una composición de funtores sea igual a la identidad, mientras que en teoría de categorías en ocasiones importa *caracterizar los objetos salvo isomorfismos*. Se obtiene entonces la siguiente noción:

Definición 2.2.28. Un funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ es una *equivalencia de categorias* si existe un funtor $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $1_{\mathcal{C}} \cong G \circ F$ y $F \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$

Es obvio que todo isomorfismo de categorías es una equivalencia de categorías, pero el recíproco en general no se cumple.

Teorema 2.2.29. Un funtor $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ es una equivalencia de categorías si y sólo si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo, es decir, para cada objeto $D \in \mathfrak{D}$ existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que $D \simeq FC$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ un funtor e $\tau : G \circ F \Longrightarrow 1_{\mathfrak{C}}$, $\mu : 1_{\mathfrak{D}} \Longrightarrow F \circ G$ isomorfismos naturales.
F es fiel: Sean $f, g : C \rightrightarrows C'$ flechas de $\mathfrak{C}$ tales que $Ff = Fg$. La naturalidad de τ nos proveen de las siguientes ecuaciones:

$$f \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ (G \circ F)f$$

$$g \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ (G \circ F)g$$

Como $(G \circ F)f = (G \circ F)g$, conseguimos que

$$\tau_{C'}^{-1} \circ f \circ \tau_C = \tau_{C'}^{-1} \circ g \circ \tau_C$$

de donde $f = g$ y F es fiel. Por simetría conseguimos que G es fiel también.
F es pleno: Sea $h : FC \to FC'$ una flecha de $\mathfrak{D}$. Definimos $f : C \to C'$ como la composición, $C \xrightarrow{\tau_C^{-1}} (G \circ F)C \xrightarrow{Gh} (G \circ F)C' \xrightarrow{\tau_{C'}} C'$.
La naturalidad de τ provee la ecuación:

$$f \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ (G \circ F)f$$

por lo tanto

$$\tau_{C'}^{-1} \circ f \circ \tau_C = \tau_{C'}^{-1} \circ \tau_{C'} \circ (G \circ F)f$$

de aquí

$$\tau_{C'}^{-1} \circ f \circ \tau_C = (G \circ F)f$$

luego de la definición de f, tenemos que $G(Ff) = (G \circ F)f = Gh$; como G es fiel , deducimos que $Ff = h$, de donde F es pleno.

F es esencialmente sobreyectivo: Si $D \in \mathfrak{D}$ entonces $F(GD) = (F \circ G)C \simeq D$ a través del isomorfismo μ_D.

($\Leftarrow$) Como F es esencialmente sobreyectivo, para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe $C_D \in \mathfrak{C}$ tal que $D \simeq FC_D$.

Sea $\mu_D : D \to FC_D$ un isomorfismo. Construyamos un funtor $G : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ de tal manera que $\mu : 1_{\mathfrak{D}} \Longrightarrow F \circ G$ sea un isomorfismo natural.

Para ello dado $D \in \mathfrak{D}$ le asignamos el objeto $GD = C_D$.

Ahora dado una flecha $h : D \to D'$ en $\mathfrak{D}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mu_D"] \arrow[d, "h"'] & FC_D \arrow[d, "\mu_{D'} \circ h \circ \mu_D^{-1}"] \\
D' \arrow[r, "\mu_{D'}"'] & FC_{D'}
\end{tikzcd}$$

(1.4)

¿Es la flecha $(\mu_{D'} \circ h \circ \mu_D^{-1})$ la imagen vía F de alguna flecha en $\mathfrak{C}$?. Sí, por que F es pleno, llamémosle $f_h : C_D \to C_{D'}$ a esta flecha. Así definimos $Gh = f_h$. Nótese que $Ff_h = \mu_{D'} \circ h \circ \mu_D^{-1}$. Es fácil ver que G así definido es un funtor.

Ahora, dado que los μ_D son isomorfismos y dado que el diagrama (1.4) conmuta entonces ya tenemos el isomorfismo natural buscado.

Basta ahora encontrar un isomorfismo natural $\tau : 1_{\mathfrak{C}} \Longrightarrow G \circ F$.

Consideremos $\mu_{FC} : FC \to (F \circ G)FC$. Como F es pleno, existe $\tau_C : C \to (G \circ F)C$ tal que $\mu_{FC} = F\tau_C$. Como μ_{FC} es un isomorfismo y F es fiel y pleno, entonces τ_C también es un isomorfismo (todo funtor fiel y pleno refleja

isomorfismos)
Por último de la naturalidad de μ se deduce que $\tau : 1_{\mathfrak{C}} \Longrightarrow G \circ F$ es una transformación natural.

■

Ahora probaremos uno de los resultados mas importantes dentro de la teoría de categorías y dentro de esta tesis también , el famoso *teorema de Yoneda*, que se presta a diferentes discusiones, tanto matemáticas como filosóficas. Este lema versa sobre funtores representables y en términos generales el lema sugiere que en lugar de investigar una cierta categoría pequeña $\mathcal{C}$ podemos estudiar la categoría $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$

Teorema 2.2.30 (Teorema de Yoneda)**.** Considere un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ desde una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ a la categoría de conjuntos y funciones, un objeto A de $\mathcal{C}$ y su correspondiente funtor representable $\mathcal{C}(A, \cdot) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Existe una correspondencia biyectiva

$$\theta_{F,A} : Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F) \cong FA$$

entre las transformaciones naturales de $\mathcal{C}(A, \cdot)$ a F y los elementos del conjunto FA; en particular esas transformaciones naturales constituyen un conjunto. Aún más, si $\mathcal{C}$ es pequeña las biyecciones $\theta_{F,A}$ constituyen una transformación natural en la variable F; también las biyecciones $\theta_{F,A}$ constituyen una transformación natural en la variable A.

Demostración. Para una determinada transformación natural $\alpha : \mathcal{C}(A, \cdot) \Longrightarrow F$, definimos $\theta_{F,A}(\alpha) = \alpha_A(1_A)$, note que por ser α una transformación natural, $\alpha_A(1_A) \in FA$.
Ahora para todo $a \in FA$, y todo objeto B en $\mathcal{C}$, le asociamos la función $\beta(a)_B : \mathcal{C}(A, \cdot)B \to FB$, definido por $\beta(a)_B(f) = Ff(a)$, aquí $f \in \mathcal{C}(A, B)$, y

por la funtorialidad de F, $Ff(a) \in FB$.

Afirmamos ahora que la clase de funciones:

$$\{\beta(a)_B : \mathcal{C}(A, \cdot)B \to FB\}_{B \in \mathcal{C}}$$

en **Set** para todo objeto B y todo morfismo $g : B \to C$ en $\mathcal{C}$ forman una transformación natural $\beta(a) : \mathcal{C}(A, \cdot) \Longrightarrow F$.

En efecto, $\beta(a)$ debe satisfacer la condición de naturalidad, así debemos demostrar que

$$Fg \circ \beta(a)_B = \beta(a)_C \circ \mathcal{C}(A, g)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A, \cdot)B \arrow[r, "\beta(a)_B"] \arrow[d, "\mathcal{C}(A,g)"'] & FB \arrow[d, "Fg"] \\
\mathcal{C}(A, \cdot)C \arrow[r, "\beta(a)_C"] & FC
\end{tikzcd}$$

Dado $f \in \mathcal{C}(A, B)$, tenemos

$$(Fg \circ \beta(a)_B)(f) = Fg(\beta(a)_B(f)) = Fg(Ff(a)) = F(g \circ f)(a) = \beta(a)_C(g \circ f)$$

$$= \beta(a)_C(\mathcal{C}(A, g)f) = (\beta(a)_C \circ \mathcal{C}(A, g))(f)$$

Ahora mostremos que tanto $\theta_{F,A}$ y β son inversas entre sí. En efecto, dado $a \in FA$, tenemos

$$(\theta_{F,A} \circ \beta)(a) = \theta_{F,A}(\beta(a)) = \beta(a)_A(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{FA}(a) = a$$

Por otro lado, a partir de $\alpha : \mathcal{C}(A, \cdot) \Longrightarrow F$ y dado el morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$, entonces

$$\beta(\theta_{F,A}(\alpha))_B(f) = \beta(\alpha_A(1_A))_B(f) = Ff(\alpha_A(1_A)) = \alpha_B(\mathcal{C}(A, f)(1_A)) = \alpha_B(f)$$

Esto demuestra la primera parte del teorema.

Como queremos que

$$\theta_{F,A} : Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F) \to FA$$

sea una transformación natural en la variable A, ésta transformación debe ser de algún funtor, digamos $N : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ en F, entonces lo más natural es definir el funtor $N : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ como

$$N(A) = Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F)$$

y para todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$

$$N(f) : Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F) \to Nat(\mathcal{C}(B, \cdot), F)$$

$$\alpha \mapsto \alpha \circ \mathcal{C}(f, \cdot)$$

Con esto, es fácil ver que $\eta : N \Longrightarrow F$ definido por $\eta_A = \theta_{F,A}$ es una transformación natural.
Por otro lado, si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, las biyecciones $\theta_{F,A}$ constituyen una transformación natural en la variable F, en este caso F tendrá que ser objeto de una categoría, y como $\mathcal{C}$ es pequeña, consideramos la categoría funtor $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$. Para un objeto fijo A en $\mathcal{C}$, consideremos el funtor

$$M : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{Set}$$

definido por

$$M(F) = Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F)$$

Dado el funtor $G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ y una transformación natural $\omega : F \Longrightarrow G$

$$M(\omega) : Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), F) \to Nat(\mathcal{C}(A, \cdot), G)$$

es definido por $M(\omega)(\alpha) = \omega \circ \alpha$.
Necesitamos ahora otro funtor de $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{Set}$, para ello consideramos el funtor *evaluación* en A

$$ev_A : \mathbf{Set}^{\mathcal{C}} \to \mathbf{Set}$$

definido por $ev_A(F) = FA$, $ev_A(\omega) = \omega_A$.
Luego es fácil ver que $\mu : M \Longrightarrow ev_A$ es una tranformación natural definido por $\mu_F = \theta_{F,A}$. Esto termina la prueba.

$\blacksquare$

Finalizaremos esta parte con un breve comentario sobre límites y colimites.

Definición 2.2.31. Sea $D : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ un diagrama. Un *cono* para el diagrama D es un par $(C, (\lambda_j)_{j\in\mathfrak{J}})$, donde $C \in \mathfrak{C}$ y $\lambda_j : C \to D_j$ para todo $j \in \mathfrak{J}$, tal que para cada flecha $e^i_j : i \to j$ en $\mathfrak{J}$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & D_i \arrow[d, "De^i_j"] \\ & D_j \end{tikzcd}$$

Escribiremos un tal cono como (C, λ_j). Llamaremos al objeto C el *vértice* del cono (C, λ_j).
Sean dos conos (C, λ_j) y (C', ϑ_j) para el diagrama D. Un *morfismo de conos* $f : (C', \vartheta_j) \to (C, \lambda_j)$ es una flecha $f : C' \to C$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in \mathfrak{J}$:

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\vartheta_i"'] & C \arrow[d, "\lambda_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

De esta manera, los conos para un diagrama D conforman una categoría.
Un *límite* para el diagrama D es un objeto final en la categoría de conos sobre el diagrama D. Explícitamente, un límite para el diagrama D es un cono (C, λ_j) (que llamaremos *cono límite*) tal que para cualquier otro cono (C', ϑ_j) existe una única flecha $f : C' \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha $e^i_j : i \to j$ de $\mathfrak{J}$:

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "\vartheta_i"] \arrow[ddr, bend right, "\vartheta_j"'] & & \\ & C \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "\lambda_j"] & D_i \arrow[dl, "De^i_j"] \\ & D_j & \end{tikzcd}$$

En virtud de la proposición 2.2.7 , si existe el límite de un diagrama, entonces es único salvo isomorfismos. Podemos escribir entonces el límite de D como $(\varprojlim D, \lambda_j)$.
Sea $\mathfrak{J}$ una categoría pequeña. Decimos que una categoría $\mathfrak{C}$ es $\mathfrak{J}$-*completa* si para todo diagrama $D : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ existe el límite de D. Decimos que es *completa* si es $\mathfrak{J}$-completa para toda categoría pequeña $\mathfrak{J}$.
Observación. Sean (C, λ_j) y (C', ϑ_j) conos para un diagrama $D : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$. Es fácil ver que un isomorfismo $(C', \vartheta_j) \to (C, \lambda_j)$ en la categoría de conos sobre el diagrama D consiste en un isomorfismo $\theta : C' \to C$ que hace conmutar el siguiente diagrama para todo $i \in \mathfrak{J}$:

$$\begin{tikzcd} C' \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\vartheta_i"'] & C \arrow[d, "\lambda_i"] \\ & D_i \end{tikzcd}$$

A continuación definimos los colímites. En general, el prefijo “Co-” en teoría de categorías indica que consideramos la noción dual. Podríamos definir entonces un colímite en $\mathfrak{C}$ como un límite en $\mathfrak{C}^{op}$: esto es muy sucinto pero también poco explicativo.
Desarrollemos lo que esto significa:

Definición 2.2.32. Sea $D : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ un diagrama. Un *cocono* para el diagrama D es un par $(C, (\lambda_j)_{j\in\mathfrak{J}})$ donde $C \in \mathfrak{C}$ y $\lambda_j : D_j \to C$ para todo $j \in \mathfrak{C}$, tal que el siguiente diagrama conmuta para toda flecha $e^i_j : i \to j$ de $\mathfrak{J}$:

$$\begin{tikzcd} D_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[dr, "De^i_j"'] & C \\ & D_j \arrow[u, "\lambda_j"'] \end{tikzcd}$$

Escribiremos un tal cocono como (C, λ_j). Llamaremos al objeto C el *vértice* del cocono (C, λ_j).

Sean (C, λ_j) y (C', ϑ_j) dos coconos para el diagrama D. Un morfismo de coconos $f : (C, \lambda_j) \to (C', \vartheta_j)$ es una flecha $f : C \to C'$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in \mathfrak{J}$:

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\vartheta_i"'] & C \arrow[d, "f"] \\
& C'
\end{tikzcd}$$

De esta manera, los coconos para un diagrama D conforman una categoría.
Un *colímite* para el diagrama D es un objeto inicial en la categoría de coconos sobre el diagrama D. Explícitamente, un colímite para el diagrama D es un cocono (C, λ_j) tal que para cualquier otro cocono (C', ϑ_j) existe una única flecha $f : C \to C'$ que hace conmutar el siguiente diagrama para toda flecha $e^i_j : i \to j$ de $\mathfrak{J}$:

$$\begin{tikzcd}
C' & & \\
& C \arrow[ul, dashed, "f"'] & D_i \arrow[l, "\lambda_i"] \arrow[ull, bend right, "\vartheta_i"'] \arrow[dl, "De^i_j"] \\
& D_j \arrow[u, "\lambda_j"] \arrow[uul, bend left, "\vartheta_j"] &
\end{tikzcd}$$

Gracias a la proposición 2.2.7 , si existe el colímite de un diagrama es único salvo isomorfismo. Podemos escribir entonces el colímite de D como $(\varinjlim D, \lambda_j)$.
Sea $\mathfrak{J}$ una categoría pequeña. Decimos que una categoría $\mathfrak{C}$ es $\mathfrak{J}$-*cocompleta* si para todo diagrama $D : \mathfrak{J} \to \mathfrak{C}$ existe el colímite de D. Decimos que es *cocompleta* si es $\mathfrak{J}$-cocompleta para toda categoría pequeña $\mathfrak{J}$.

Ejemplo 2.2.5. 1. Un objeto final en $\mathfrak{C}$ es el límite del único diagrama $\mathbf{0} \to \mathfrak{C}$.
2. Un objeto inicial en $\mathfrak{C}$ es el colímite del único diagrama $\mathbf{0} \to \mathfrak{C}$.
3. En ciertas áreas de la matemática hay algunos tipos de límites y colímites que se estudian especialmente. En particular, un límite (resp. colímite) sobre una categoría de índices que es un orden parcial se llama límite proyectivo o límite inverso (resp. límite inductivo o límite directo).

4. **PRODUCTOS**.

Todo el mundo sabe como se construye el producto cartesiano de dos conjuntos A y B; esto es sólo $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$, este producto está provisto de dos proyecciones canónicas

$$\pi_A : A \times B \to A,\ \pi_A(a,b) = a$$
$$\pi_B : A \times B \to B,\ \pi_B(a,b) = b.$$

Por otra parte, si C es un conjunto y $f : C \to A$, $g : C \to B$ son funciones arbitrarias, existe una única función $h : C \to A \times B$ tal que el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \end{tikzcd}$$

conmuta, i.e., $\pi_A \circ h = f$ y $\pi_B \circ h = g$.

En efecto, basta definir $h(c) = (f(c), g(c))$ para cada $c \in C$.

Generalmente a la función h se le denota por $< f, g >$. Este hecho, que analizamos en la categoría **Set**, es mucho más general y tiene sentido en todas las categorías y es uno de los principales ejemplos de límites, a continuación enunciamos la definición de *producto*: Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $A, B \in \mathfrak{C}$ dos objetos de $\mathfrak{C}$. Un *producto* (cartesiano) de A y B es, por definición un triplo (P, π_A, π_B) donde

(1) $P \in \mathfrak{C}$ es un objeto,

(2) $\pi_A : P \to A$ y $\pi_B : P \to B$ son morfismos,

de tal manera que para todo triplo (Q, q_A, q_B) donde

(1) $Q \in \mathfrak{C}$ es un objeto,

(2) $q_A : Q \to A$ y $q_B : Q \to B$ son morfismos,

existe una única flecha $r : Q \to P$ tal que

$q_A = \pi_A \circ r$ y $q_B = \pi_B \circ r$.

En realidad la definición anterior se restringe al producto de dos objetos, pero se puede definir de manera formal el producto de una familia de objetos de una cierta categoría.

5. **COPRODUCTOS**.

Ahora mostramos un ejemplo de límite que no es más que la noción dual del producto definido en el ejemplo anterior, así tenemos la siguiente definición:

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría y $A, B \in \mathfrak{C}$ dos objetos de $\mathfrak{C}$. Un *coproducto* de A y B es, por definición un triplo (P, i_A, i_B) donde

(1) $P \in \mathfrak{C}$ es un objeto,

(2) $i_A : A \to P$ y $i_B : B \to P$ son morfismos,

de tal manera que para todo triplo (Q, q_A, q_B) donde

(1) $Q \in \mathfrak{C}$ es un objeto,

(2) $q_A : A \to Q$ y $q_B : B \to Q$ son morfismos,

existe una única flecha $r : P \to Q$ tal que

$q_A = r \circ i_A$ y $q_B = r \circ i_B$.

6. **ECUALIZADORES**

La noción de producto define un "objeto límite" (el producto) a partir de una determinada familia de objetos. Queremos ahora definir "límite" a partir de objetos y morfismos, de esta manera obtenemos el siguiente ejemplo importante de límite:

Consideremos dos morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ en una categoría $\mathfrak{C}$. Un *ecualizador* de f, g es un par (K, k) donde

(1) K es un objeto de $\mathfrak{C}$

(2) $k : K \to A$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ k = g \circ k$,

y es tal que para todo par (M, m) donde

(1) M es un objeto de $\mathfrak{C}$

(2) $m : M \to A$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ m = g \circ m$,

existe un único morfismo $n : M \to K$ tal que $m = k \circ n$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, dashed, "n"'] \arrow[dr, "m"] & & \\
K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

Podemos deducir algunos resultados importantes acerca de este límite, por ejemplo:

▶ Cuando existe el ecualizador de dos morfismos, es único salvo isomorfismo.

▶ En una categoría $\mathfrak{C}$, cuando dos morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ tienen un ecualizador (K, k), el morfismo $k : K \to A$ es un monomorfismo.

Para ganar intuición, nótese que en la categoría **Set**, el ecualizador del par de funciones $f, g : A \rightrightarrows B$ es el par (E, i) donde $E \subseteq A$, es dado por $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ e $i : E \to A$ es la función inclusión, i.e., $i(a) = a$ para todo $a \in E$.

7. **COECUALIZADORES**

Ahora mostramos un ejemplo de límite que no es más que la noción dual del ecualizador definido en el ejemplo anterior, así tenemos la siguiente definición:
Consideremos dos morfismos $f, g : A \rightrightarrows B$ en una categoría $\mathfrak{C}$.
Un *coecualizador* de f, g es un par (K, k) donde
(1) K es un objeto de $\mathfrak{C}$,
(2) $k : B \to K$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$ tal que $k \circ f = k \circ g$, y es tal que para todo par (M, m) donde
(1) M es un objeto de $\mathfrak{C}$,
(2) $m : B \to M$ es un morfismo de $\mathfrak{C}$ tal que $m \circ f = m \circ g$, existe un único morfismo $n : K \to M$ tal que $n \circ k = m$.

8. **PULLBACKS**

Este es otro ejemplo de un "objeto límite" construido a partir de objetos y morfismos.

Consideremos dos morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to C$ en una categoría $\mathfrak{C}$. Un *pullback* de (f, g) es un triplo (P, p_2, p_1) donde

(1) P es un objeto de $\mathfrak{C}$

(2) $p_2 : P \to B$, $p_1 : P \to A$ son morfismos de $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$ y es tal que para todo triplo (Z, z_2, z_1) donde

(1) Z es un objeto de $\mathfrak{C}$

(2) $z_2 : Z \to B$, $z_1 : Z \to A$ son morfismos de $\mathfrak{C}$ tal que $f \circ z_1 = g \circ z_2$, existe un único morfismo $r : Z \to P$ tal que $z_2 = p_2 \circ r$ y $z_1 = p_1 \circ r$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, bend left, "z_2"] \arrow[ddr, bend right, "z_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Podemos deducir algunos resultados importantes acerca de los pullbacks, por ejemplo:

▶ Con las condiciones de la definición anterior, si el triplo (P, p_2, p_1) es el pullback de los morfismos (f, g), entonces:

(1) Si g es un monomorfismo, p_1 también es un monomorfismo.

(2) Si g es un isomorfismo, p_1 también es un isomorfismo.

▶ Supongamos que el siguiente diagrama conmuta y que el cuadrado de la derecha es un pullback (para g y j). Entonces el cuadrado de la izquierda es un pullback (para f e i) si y sólo si el rectángulo exterior es un pullback (para $g \circ f$ y j):

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"] & E \arrow[r, "m"] \arrow[d, "i"] & F \arrow[d, "j"] \\
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

9. **PUSHOUTS**

Ahora mostramos un ejemplo de límite que no es más que la noción dual del

pullback definido en el ejemplo anterior, así tenemos la siguiente definición:
Consideremos dos morfismos $g : C \to B$, $f : C \to A$ en una categoría $\mathfrak{C}$. Un *pushouts* de (g, f) es un triplo (P, g', f') donde
(1) P es un objeto de $\mathfrak{C}$
(2) $g' : A \to P$, $f' : B \to P$ son morfismos de $\mathfrak{C}$ tal que $f' \circ g = g' \circ f$, y es tal que para cualquier otro triplo (Q, g'', f'') donde
(1) Q es un objeto de $\mathfrak{C}$
(2) $g'' : A \to Q$, $f'' : B \to Q$ son morfismos de $\mathfrak{C}$ tal que $f'' \circ g = g'' \circ f$, entonces existe un único morfismo $q : P \to Q$ tal que $q \circ f' = f''$ y $q \circ g' = g''$.

• TEORÍA DE MULTICATEGORIAS

Las multicategorías no son nada misterioso; de la misma manera como se nos ha enseñado acerca de los mapas de una o mas variables, es natural pensar en "categorías" donde los morfismos tienen más de una entrada. La idea es redefinir una categoría para obtener mapas de una cadena (finita) de objetos $(X_1, \ldots, X_n)$ a un objeto de salida X; por supuesto que se necesita un poco más de axiomas que sólo la n-aridad de los morfismos.

El concepto de árbol

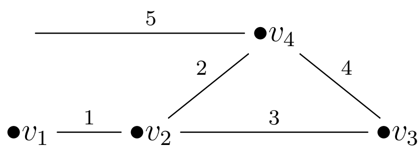
A continuación, guiándonos de [Diestel, 2017], haremos un breve esbozo de teoría de grafos con el fin de llegar al concepto de árbol que nos brinda un modelo gráfico para visualizar las multicategorias.

Definición 2.2.33. Un *grafo* G es un par (E, V) que consta de un conjunto E de aristas y un conjunto $V \subseteq P(E)$ de vértices de tal manera que una arista $e \in E$ pertenece a lo más a dos vértices.

Las aristas que pertenecen a dos vértices se denominan *interiores*, mientras que las que pertenecen a uno de los vértices se llaman *exteriores*.

Dos aristas e_1, e_2 pertenecientes a un mismo vértice v se dicen *unidos* por v.

Ejemplo 2.2.6. Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde $v_1 = \{1\}$, $v_2 = \{1, 2, 3\}$, $v_3 = \{3, 4\}$, $v_4 = \{2, 4, 5\}$. El grafo correspondiente es



la arista 1 es interior, mientras que 5 es una arista exterior.

Definición 2.2.34. Dadas aristas e_1 y e_n en un grafo G, un *camino* de e_1 a e_n es una secuencia $(e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n)$ de aristas e_i y vértices v_j, tal que $e_i, e_{i+1} \in v_i$ y $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$.

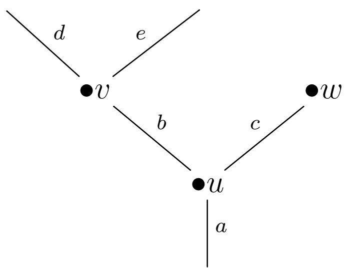
Un camino con al menos tres aristas tal que $e_1 = e_n$ se denomina *ciclo*. Un grafo G en el que para cualquier par de aristas e, e' existe un camino de e a e' se llama *conexo*.

Ejemplo 2.2.7. En el grafo del ejemplo 2.2.6 tenemos un ciclo

$$(2, v_2, 3, v_3, 4, v_4, 2)$$

Definición 2.2.35. Un *árbol* es un grafo conexo sin ciclos y una arista exterior elegida llamado *raíz*, tal que cada vértice v es un conjunto finito no vacío. Las aristas exteriores distintas de la raíz se denominan *hojas*.

La elección de una raíz define una dirección en el árbol y, por tanto, para cada vértice v un conjunto $in(v)$ de aristas entrantes (entradas) y una arista saliente $out(v)$, la salida. Los árboles serán dibujados con la raíz en la parte inferior, dirigida hacia la raíz. Por ejemplo en el árbol



El vértice v tiene como entradas las aristas d, e y de salida la arista b, mientras que w tiene salida c pero no tiene entrada, y a es la raíz del árbol.
Un árbol T es entonces determinado por el triplo $(E(T), V(T), out(T))$, donde $out(T)$ denota la raíz de T, mientras que las hojas se denotan por $in(T)$.
Una operación importante en árboles es la inserción.

Definición 2.2.36. Sean T y S árboles tal que $E(S) \cap E(T) = \{r\}$, donde r es la raíz de S y una hoja de T. La *inserción* $T \circ S$ de S en T a través de r es el árbol

$$(E(S) \cup E(T), V(S) \cup V(T), out(T))$$

En particular, supongamos que el vértice v que contiene la raiz r de un árbol T tiene entradas $e_1, \ldots, e_n$; denotando por T_{e_i} el subárbol de T que tiene e_i como raíz y por T_r el árbol que consiste solamente en el vértice v uno puede descomponer T como la inserción

$$T = T_r \circ (T_{e_1}, \ldots, T_{e_n})$$

que es la inserción iterativa de T_{e_i} a lo largo de la hoja e_i del árbol $T_r \circ (T_{e_1} \circ \ldots \circ T_{e_{i-1}})$. Esto se conoce como la *descomposición fundamental de árboles* y se sigue por la definición de inserción y de que $E(T_{e_i}) \cap E(T_{e_j}) = \varnothing$ si $i \neq j$, mientras $E(T_{e_i}) \cap E(T_r) = e_i$.

Un tipo de árbol que ocurrirá muy a menudo es el siguiente

Definición 2.2.37. Un *árbol plano* T, es un árbol T junto con una ordenación lineal de $in(v)$ para cada vértice v.

Ahora que ya sabemos el concepto de arbol, pasamos a definir lo que viene a ser una multicategoria plana como en [Leinster, 2004a] o en [Leinster, 2004b] , que va a generalizar en si la definicion de categoria dada en 2.2.1.

Definición 2.2.38. Una *multicategoría plana* $\mathcal{P}$ consta de los siguientes datos
(i) una clase de *objetos* $\mathcal{P}_0$
(ii) para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ y objetos $p_1, \ldots, p_n, p$ un conjunto $\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p)$, de *operaciones* (o *flechas*). Se supone que si

$$\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p_0) \cap \mathcal{P}(q_1, \ldots, q_m;q_0) \neq \varnothing$$

entonces $n = m$ y $p_i = q_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$. Tenga en cuenta que también se describen las operaciones de *aridad* 0, cuyo conjunto es denotado por $\mathcal{P}(;p)$
(iii) para cada objeto p una operación $1_p \in \mathcal{P}(p;p)$, la *identidad* en p
(iv) dados $p_1, \ldots, p_n, p$ y para cada $1 \leq i \leq n$ una secuencia $p_1^i, \ldots, p_{m_i}^i$, tenemos un *mapa composición*

$$\mu : \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p) \times \mathcal{P}(p_1^1, \ldots, p_{m_1}^1;p_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(p_1^n, \ldots, p_{m_n}^n;p_n)$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{P}(p_1^1, \ldots, p_{m_1}^1, \ldots, p_1^n, \ldots, p_{m_n}^n;p)$$

dado por $(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_n) \mapsto \mu(\psi, \psi_1, \ldots, \psi_n) = \psi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)$
estos datos están sujetos a los siguientes axiomas
1. Identidad: cada vez que la composición tiene sentido, uno tiene que

$$\psi \circ (1_{p_1}, \ldots, 1_{p_n}) = \psi$$

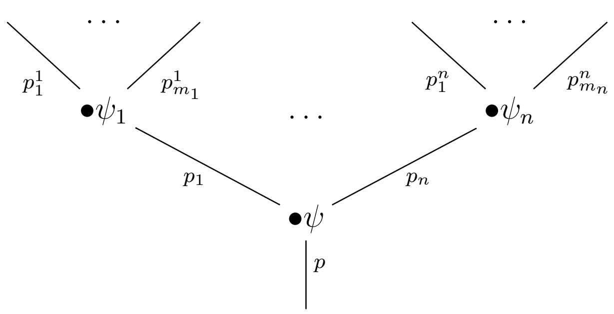
$$1_p \circ (\psi) = \psi$$

2. Asociatividad: dado $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p)$, flechas $\psi_i \in \mathcal{P}(p_1^i, \ldots, p_{m_i}^i;p_i)$ para $1 \leq i \leq n$ y flechas $\psi_{j_i}^i$ para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j_i \leq m_i$ con la salida $p_{j_i}^i$, la siguiente igualdad se cumple $\psi \circ (\psi_1 \circ (\psi_1^1, \ldots, \psi_{m_1}^1), \ldots, \psi_n \circ (\psi_1^n, \ldots, \psi_{m_n}^n)) = (\psi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)) \circ (\psi_1^1, \ldots \psi_{m_1}^1, \ldots, \psi_1^n, \ldots, \psi_{m_n}^n)$

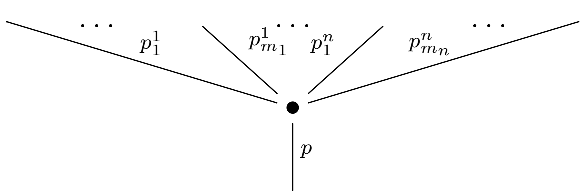
Existe otra manera de definir la composición en multicategorías, por medio de la $\circ_i$-composición.
Sea $\phi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n; p)$ y $\psi \in \mathcal{P}(q_1, \ldots, q_m; p_i)$, definimos la $\circ_i$-composición de ϕ y ψ como

$$\phi \circ_i \psi = \phi \circ (1, \ldots, 1, \psi, 1, \ldots, 1) \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_{i-1}, q_1, \ldots, q_m, p_{i+1}, \ldots, p_n; p)$$

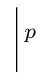
Es claro que el uso iterativo de la $\circ_i$-composición se recupera la noción anterior de composición, y el orden en que las operaciones se componen no afecta el resultado.
Las definiciones anteriores se entienden mejor si se utilizan *árboles planos etiquetados*. Dado una multicategoría $\mathcal{P}$ uno puede construir un árbol plano etiquetado T mediante el etiquetado de las aristas con los objetos de $\mathcal{P}$ y sus vértices con las operaciones de $\mathcal{P}$. Es decir, dado una operación $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n; p)$ de aridad n, uno construye un nodo con vértice ψ, aristas de entradas $in(\psi) = (p_1, \ldots, p_n)$ y arista de salida $out(\psi) = p$.
Por ejemplo el mapa composición μ puede ser descrito como enviando el árbol



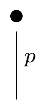
a la corolla



mientras que la flecha identidad en un objeto p tiene la forma



En particular una operación de aridad cero en $\mathcal{P}(;p)$ se representa como



Antes de mostrar algunos ejemplos de multicategorias es necesario conocer en la teoría ordinaria de categorias algunos conceptos sobre *categorias monoidales* (ver [Joyal and Street, 1993])

Definición 2.2.39. Una *categoría monoidal* es una categoría $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ equipado con

(i) un funtor $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $(X, Y) \mapsto X \otimes Y$, el *tensor*,

(ii) un objeto distinguido I de $\mathcal{M}$, la *unidad* del tensor

(iii) isomorfismos naturales

$$\alpha = (\alpha_{X,Y,Z} : X \otimes (Y \otimes Z) \to (X \otimes Y) \otimes Z)_{X,Y,Z \in \mathcal{M}}$$

$$\lambda = (\lambda_X : I \otimes X \to X)_{X \in \mathcal{M}}$$

$$\rho = (\rho_X : X \otimes I \to X)_{X \in \mathcal{M}}$$

los isomorfismos anteriores son tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1\otimes\alpha"] & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "\alpha"] & ((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \\
W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[rr, "\alpha"] & & (W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[u, "\alpha\otimes 1"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (I \otimes Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "1\otimes\lambda"'] & (X \otimes I) \otimes Y \arrow[d, "\rho\otimes 1"] \\
& X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

para todo W, X, Y, Z en $\mathcal{M}$. Además se requiere que

$$\lambda_I = \rho_I : I \otimes I \to I$$

Definición 2.2.40. Sean $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ y $\mathcal{M}' = (\mathcal{M}', \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ categorías monoidales. Un *funtor monoidal lax* $F = (F, \phi) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ consta de un funtor $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ y flechas $\phi_{X,Y} : FX \otimes FY \to F(X \otimes Y)$, $\phi : I \to FI$, la primera de las cuales es natural en X, Y, y tal que para todo $X, Y, Z \in \mathcal{M}$, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes (FY \otimes FZ) \arrow[r, "1\otimes\phi"] \arrow[d, "\alpha"] & FX \otimes F(Y \otimes Z) \arrow[r, "\phi"] & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \arrow[d, "F\alpha"] \\
(FX \otimes FY) \otimes FZ \arrow[r, "\phi\otimes 1"] & F(X \otimes Y) \otimes FZ \arrow[r, "\phi"] & F((X \otimes Y) \otimes Z)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \otimes I \arrow[r, "1\otimes\phi"] \arrow[dr, "\rho"] & FX \otimes FI \arrow[r, "\phi"] & F(X \otimes I) \arrow[dl, "F\rho"] \\
& FX &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes FX \arrow[r, "\phi\otimes 1"] \arrow[dr, "\lambda"] & FI \otimes FX \arrow[r, "\phi"] & F(I \otimes X) \arrow[dl, "F\lambda"] \\
& FX &
\end{tikzcd}$$

Definición 2.2.41. Sean $(F, \phi), (G, \psi) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ funtores monoidales lax. Una *transformación monoidal* $(F, \phi) \Longrightarrow (G, \psi)$ es una transformación natural $\theta : F \Longrightarrow G$ tal que los siguientes diagramas conmutan para todo $X, Y \in \mathcal{M}$

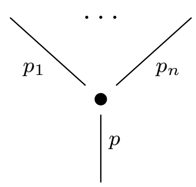
$$\begin{tikzcd}
FX \otimes FY \arrow[r, "\theta\otimes\theta"] \arrow[d, "\phi"] & GX \otimes GY \arrow[d, "\psi"] \\
F(X \otimes Y) \arrow[r, "\theta"] & G(X \otimes Y)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
FI \arrow[rr, "\theta"] & & GI
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.2.8. 1. Una multicategoría en el que cada operación es unaria (es decir de aridad 1) es lo mismo que una categoría.

2. Cualquier categoría monoidal $(\mathcal{M}, \otimes)$ tiene una multicategoría subyacente

$\mathcal{P}$. Esta multicategoría tiene los mismos objetos que $\mathcal{M}$, y una operación



en $\mathcal{P}$ es un morfismo

$$p_1 \otimes \ldots \otimes p_n \longrightarrow p$$

en $\mathcal{M}$. Donde la composición en $\mathcal{P}$ se deriva de la composición y el tensor $\otimes$ en $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal débil, entonces hay cierta ambigüedad en el significado de $p_1 \otimes \ldots \otimes p_n$, aquí nos limitaremos a elegir, por ejemplo, $((p_1 \otimes p_2) \otimes p_3) \otimes p_4$ para $n = 4$.
De manera similar, dado una categoría $\mathcal{M}$ con productos finitos, existe una multicategoría subyacente $\mathcal{P}$ con los mismos objetos que $\mathcal{M}$ y con

$$\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n; p) = \mathcal{M}(p_1 \times \ldots \times p_n, p)$$

Más adelante, vamos hacer un uso particular de la multicategoría $\mathcal{P}$ que viene de la categoría $\mathcal{M} = \mathbf{Set}$, escribiremos $\mathcal{P} = \mathbf{Set}$ también.
3. Si $\mathcal{M}$ es una categoría con coproductos finitos, entonces el ejemplo anterior revela que hay una multicategoría $\mathcal{P}$ con los mismos objetos que $\mathcal{M}$ y con

$$\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n; p) = \mathcal{M}(p_1, p) \times \ldots \times \mathcal{M}(p_n, p)$$

y el mapa composición dado por

$$\psi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n) = (f_1 \circ f_1^1, \ldots, f_1 \circ f_{m_1}^1, \ldots, f_n \circ f_1^n, \ldots, f_n \circ f_{m_n}^n)$$

donde $f_i \in \mathcal{M}(p_i, p)$ y $f_{j_i}^i \in \mathcal{M}(p_{j_i}^i, p_i)$ con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j_i \leq m_i$
4. Una categoría en la que cada *conjunto-Hom* tiene a lo sumo un elemento es lo mismo que un conjunto preordenado. Del mismo modo, una multicategoría $\mathcal{P}$ en que $\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n; p)$ tiene a lo sumo un elemento para cada $n, p_1, \ldots, p_n, p$ es una especie de conjunto parcialmente ordenado generalizado. Equivale a una

clase $\mathcal{P}_0 = X$ de elementos junto con una $(n+1)$-aria relación $\preceq_n$ en X para cada $n \in \mathbb{N}$, satisfaciendo reflexividad generalizada y axiomas de transitividad. Por ejemplo, sean $d \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^d$, y defina $\preceq_n$ por $(p_1, \ldots, p_n) \preceq_n p$ si y sólo si p se encuentra en la envolvente convexa de $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Esto proporciona un conjunto parcialmente ordenado generalizado; los axiomas expresan hechos básicos acerca de envolventess convexas.

Es deseable que las multicategorías formen una categoría. Para ello primero vamos a definir la noción obvia de multifuntor entre multicategorías.

Definición 2.2.42. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ multicategorías. Un *multifuntor* $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ entre ellos consta de

(i) una función $F : \mathcal{P}_0 \to \mathcal{Q}_0$, $p \mapsto Fp$

(ii) una función $F : \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n; p) \to \mathcal{Q}(Fp_1, \ldots, Fp_n; Fp)$ para cada $p_1, \ldots, p_n, p \in \mathcal{P}_0$, de tal manera que se satisfaga lo siguiente

1.

$$F(\psi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)) = F\psi \circ (F\psi_1, \ldots, F\psi_n)$$

2. para cada objeto p de $\mathcal{P}$, se tiene $F(1_p) = 1_{Fp}$

La categoría $\mathbf{Multicat}_\pi$ consta de multicategorías pequeñas y multifuntores entre ellos.

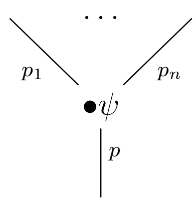
Ejemplo 2.2.9. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}'$ categorías monoidales, con respectivas multicategorías subyacentes $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$. Entonces un multifuntor $\mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ de multicategorías es precisamente un funtor monoidal lax $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$.

En la teoría de categorías ordinarias, funtores del tipo $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ juegan un papel importante. Lo mismo ocurre con las multicategorías.

Definición 2.2.43. Sea $\mathcal{P}$ una multicatrgoría. Un *álgebra* para $\mathcal{P}$, o $\mathcal{P}$-*álgebra* es un multifuntor de $\mathcal{P}$ en la multicategoría $\mathbf{Set}$ del ejemplo 2.2.8 (2).

Explícitamente, una $\mathcal{P}$-álgebra X consta de

- para cada objeto p de $\mathcal{P}$, un conjunto $X(p)$,
- para cada operación



en $\mathcal{P}$, una función

$$\overline{\psi} = X(\psi) : X(p_1) \times \ldots \times X(p_n) \to X(p)$$

Esta forma explícita, deja claro que un *mapa* de $\mathcal{P}$-álgebras, $\alpha : X \Longrightarrow Y$, debe ser definida como una familia de funciones

$$(X(p) \to Y(p))_{p \in \mathcal{P}_0}$$

que satisface la condición de compatibilidad evidente; así que tenemos una nueva categoría $\mathbf{Alg}(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$-álgebras. Una alternativa definición usa la noción de multitransformación entre multifuntores, que describiremos más adelante.

Ejemplo 2.2.10. 1. Si $\mathcal{M}$ es una categoría monoidal estricta, entonces un álgebra para su multicategoría subyacente es, por el ejemplo 2.2.9, justamente un funtor monoidal lax de $\mathcal{M}$ a $(\mathbf{Set}, \times, 1)$.
2. Si $\mathcal{P}$ es una multicategoría en el que toda operación es unaria, y así esencialmente sólo una categoría, entonces $\mathbf{Alg}(\mathcal{P})$ es la categoría funtor ordinaria $\mathbf{Set}^{\mathcal{P}}$.

Existe una variedad de multicategorías muy importantes que tienen la propiedad de tener un sólo objeto, a tales multicategorías le llamaremos *operadores*. Así un operador es una multicategoría con un sólo objeto. En cierto sentido no hay nada más que decir: las definiciones de multifuntores entre ellos, álgebras para un operador, etc son sólo casos especiales de las definiciones para multicategorías. Aquí solo mostramos la definición de operador.

Definición 2.2.44. Un *operador plano* es una multicategoría $\mathcal{P}$ con exactamente un objeto.

Por supuesto, un operador puede ser descrito equivalentemente como sigue :
Un operador plano $\mathcal{P}$ es una colección de conjuntos $\mathcal{P}(n)$, $n \geq 0$ junto con un elemento distinguido $id \in \mathcal{P}(1)$ y mapas

$$\mu : \mathcal{P}(n) \times \mathcal{P}(k_1) \times \ldots \times \mathcal{P}(k_n) \longrightarrow \mathcal{P}(k_1 + \ldots + k_n)$$

tal que para mapas $\psi \in \mathcal{P}(n)$, $\psi_i \in \mathcal{P}(k_i)$, $1 \leq i \leq n$, $\psi^i_{j_i} \in \mathcal{P}(k_{j_i})$, $1 \leq j_i \leq k_i$

$$\mu(\psi, \mu(\psi_1, \psi^1_1, \ldots, \psi^1_{k_1}), \ldots, \mu(\psi_n, \psi^n_1, \ldots, \psi^n_{k_n}))$$

$$\|$$

$$\mu(\mu(\psi_1, \psi_1, \ldots, \psi_n), \psi^1_1, \ldots, \psi^1_{k_1}, \ldots, \psi^n_1, \ldots, \psi^n_{k_n})$$

y

$$\mu(\psi, id, \ldots, id) = \psi = \mu(id, \psi)$$

Como habíamos dicho anteriormente, es posible definir mapas entre multifuntores, como indica la siguiente

Definición 2.2.45. Sean $F, G : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ multifuntores entre multicategorías planas. Una *multitransformación natural* $\alpha : F \Longrightarrow G$ es una colección $(\alpha_p)_{p\in\mathcal{P}}$ de operaciones unarias $\alpha_p \in \mathcal{Q}(Fp;Gp)$ tal que para cualquier operación $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p)$ en $\mathcal{P}$, la siguiente igualdad se cumple

$$G\psi \circ (\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_n}) = \alpha_p \circ F\psi$$

Cuando las multicategorías planas son sustituidos por multicategorías simétricas, veremos que es posible definir multitransformaciones naturales con más entradas, por lo que los multifuntores de $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ forman en realidad una multicategoría simétrica y no sólo una categoría.

Ahora haremos un breve esbozo sobre el concepto de multicategoria simétrica, tal definicion la podemos encontrar en [Cheng, 2002].

Definición 2.2.46. Una multicategoría (simétrica) $\mathcal{P}$ es una multicategoría plana junto con una acción derecha de los grupos simétricos $\sum_n$ en cada conjunto $\mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p)$, esto significa que para una permutación $\sigma \in \sum_n$ y una operación $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p)$ existe una función

$$\sigma^* : \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p) \longrightarrow \mathcal{P}(p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)};p)$$

satisfaciendo $(\sigma\tau)^* = \tau^*\sigma^*$ $(\sigma, \tau \in \sum_n)$ e $id^* = id$.
La acción de los grupos simétricos es compatible con la composición :
dadas las operaciones $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n$ (con ψ_0 de aridad n, ψ_i de aridad k_i) tal que la composición $\psi_0 \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ es definido y permutaciones $\sigma_0, \ldots, \sigma_n$ $(\sigma_0 \in \sum_n,\ \sigma_i \in \sum_{k_i})$, entonces

$$\sigma_0^*(\psi_0)(\sigma_1^*(\psi_1), \ldots, \sigma_n^*(\psi_n)) = (\sigma_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))^*(\psi_0 \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n))$$

donde $\sigma_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \sum_{k_1+\ldots+k_n}$ es la *permutación producto* obtenido considerando $\{1, \ldots, k_1 + \ldots + k_n\}$ como dividido en n intervalos de longitud k_i, permutando los elementos del i-ésimo intervalo según σ_i y los intervalos según σ_0.

Para entender mejor la definición de multicategoría simétrica, sugerimos al lector revisar el ejemplo gráfico que pone T. Leinster en [Leinster, 2004a] (página 53)
Como era de esperarse, las nociones de multifuntor y multitransformación natural se extienden a multicategorías simétricas.

Definición 2.2.47. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ multicategorías simétricas. Un *multifuntor simétrico* $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ consta de

(i) una función

$$F : \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{Q}_0$$

$$p \mapsto Fp$$

(ii) una función

$$F : \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n; p) \longrightarrow \mathcal{Q}(Fp_1, \ldots, Fp_n, ; Fp)$$

para cada secuencia $(p_1, \ldots, p_n, p)$ de objetos de $\mathcal{P}$ tal que

$$F(\psi_0 \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)) = F\psi \circ (F\psi_1, \ldots, F\psi_n)$$

cada vez que la composición $\psi_0 \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ tiene sentido. Además para cada objeto p de $\mathcal{P}$, $F(id_p) = id_{Fp}$ y

$$F(\sigma^*(\psi)) = \sigma^*(F(\psi))$$

para cualquier operación ψ de aridad n y $\sigma \in \sum_n$.

Definición 2.2.48. Sean $F_i : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, $1 \leq i \leq n$ y $F : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ multifuntores simétricos. Una *multitransformación simétrica* α de $(F_1, \ldots, F_n)$ a F es una colección $(\alpha_p)_{p \in \mathcal{P}}$ con $\alpha_p \in \mathcal{Q}(F_1p, \ldots, F_np; Fp)$ tal que para cualquier operación $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_m; p)$ tenemos que

$$\sigma^*_{m,n} F\psi \circ (\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_m}) = \alpha_p \circ (F_1\psi, \ldots, F_n\psi)$$

donde $\sigma^*_{m,n}$ es la permutación igualando las entradas de la operación composición $F\psi \circ (\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_m})$ a los de los $\alpha_p \circ (F_1\psi, \ldots, F_n\psi)$.

Como se anticipaba en la sección anterior, el conjunto de multifuntores simétricos $\mathbf{Func}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ deben formar una multicategoría simétrica .

Sea $\alpha : (F_1, \ldots, F_n) \Longrightarrow F$ y $\beta^i : (F_1^i, \ldots, F_{k_i}^i) \Longrightarrow F_i$, $1 \leq i \leq n$ multitransformaciones simétricas. Entonces definimos la composición $\alpha \circ (\beta^1, \ldots, \beta^n)$ como la multitransformación simétrica cuyas componentes vienen dadas por :

$$(\alpha \circ (\beta^1, \ldots, \beta^n))_p = \alpha_p \circ (\beta_p^1, \ldots, \beta_p^n)$$

Para ver la naturalidad de $\alpha \circ (\beta^1, \ldots, \beta^n)$, note que para una operación $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_m; p)$ tenemos

$$(\alpha_p \circ (\beta_p^1, \ldots, \beta_p^n)) \circ (F_1^1\psi, \ldots, F_{k_1}^1\psi, \ldots, F_1^n\psi, \ldots, F_{k_n}^n\psi)$$

$$\|$$

$$\alpha_p \circ (\beta_p^1 \circ (F_1^1\psi, \ldots, F_{k_1}^1\psi), \ldots, \beta_p^n \circ (F_1^n\psi, \ldots, F_{k_n}^n\psi))$$

$$\|$$

$$\alpha_p \circ (\sigma_1^*(F_1\psi \circ (\beta_{p_1}^1, \ldots, \beta_{p_m}^1)), \ldots, \sigma_n^*(F_n\psi \circ (\beta_{p_1}^n, \ldots, \beta_{p_m}^n)))$$

$$\|$$

$$\sigma^*(\alpha_p \circ (F_1\psi \circ (\beta_{p_1}^1, \ldots, \beta_{p_m}^1), \ldots, F_n\psi \circ (\beta_{p_1}^n, \ldots, \beta_{p_m}^n)))$$

$$\|$$

$$\sigma^*((\alpha_p \circ (F_1\psi, \ldots, F_n\psi)) \circ (\beta_{p_1}^1, \ldots, \beta_{p_m}^1, \ldots, \beta_{p_1}^n, \ldots, \beta_{p_m}^n))$$

$$\|$$

$$\sigma^*(\tau_\alpha^*(F\psi \circ (\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_m})) \circ (\beta_{p_1}^1, \ldots, \beta_{p_m}^1, \ldots, \beta_{p_1}^n, \ldots, \beta_{p_m}^n))$$

$$\|$$

$$\sigma^*\tau_\alpha^*(F\psi \circ (\alpha_{p_1}, \ldots, \alpha_{p_m})(\beta_{p_1}^1, \ldots, \beta_{p_m}^1, \ldots, \beta_{p_1}^n, \ldots, \beta_{p_m}^n))$$

Aquí las permutaciones que intervienen en las ecuaciones son las que provienen de las definiciones de las multritransformaciones simétricas y composición en multicategorías simétricas : σ y τ son las permutaciones producto $id(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ y $\tau_\alpha(id, \ldots, id)$.

El hecho de que la composición de multitransformaciones simétricas es asociativo viene de la asociatividad en multicategorías. Es evidente que la unidad está dado por la multitransformación simétrica que es la identidad en cada componente p. De ello se desprende, como se afirmaba, que el conjunto $\mathbf{Func}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ es una multicategoría simétrica.

Uno denota por **Multicat** la categoría cuyos objetos son las multicategorías simétricas y flechas son los multifuntores simétricos entre ellos. Gracias a los últimos argumentos se puede extender la 1-categoría **Multicat** a una 2-categoría estricta con la particularidad que las 2-celdas formen una nueva multicategoría; en cierto sentido uno tiene una *2-multicategoría*. Para detalles sobre 2-categorías y bicategorías el lector puede revisar el articulo [Leinster, 1998].

2.3. Definiciones conceptuales

• *Biyecciòn*:Termino utilizado para las funciones entre dos conjuntos que son inyectivas y sobreyectivas.

• *Categoría*: Estructura algebraica que requiere datos mínimos como axiomas, tales como la identidad y la asociatividad.

• *Funtor*: Función generalizada que preserva la estructura entre dos categorías.

• *Teorema*: Es un enunciado que puede ser demostrado como verdadero mediante argumentos lógicos.

• *Demostración o prueba*: Es un argumento deductivo para asegurar la verdad de una proposición matemática.

2.4. Formulación de la hipótesis

2.4.1. Hipótesis general

Construir un multifuntor representable que permite generalizar de manera satisfactoria dicho teorema a dimensiones superiores. Más formalmente, el siguiente multifuntor :

Proposición 2.4.1. Sea $\mathcal{P}$ una multicategoría arbitraria y sea $q \in \mathcal{P}_0$ un objeto de $\mathcal{P}$. Entonces existe un multifuntor, llamado *multifuntor representable* de q, entre multicategorías planas

$$\mathcal{P}(q^n;\cdot) : \mathcal{P} \to \mathbf{Set}$$

dado por

$$p \mapsto \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(q^n;p) = \mathcal{P}(;p) \amalg \mathcal{P}(q;p) \amalg \mathcal{P}(q,q;p) \amalg \mathcal{P}(q,q,q;p) \amalg \ldots$$

hace que el siguiente teorema:

Teorema 2.4.2. (Teorema de Yoneda para multicategorías planas) Considere un multifuntor $F : \mathcal{P} \to \mathbf{Set}$ desde una multicategoría arbitraria $\mathcal{P}$ a la multicategoría **Set**, un objeto q de $\mathcal{P}$ y su correspondiente multifuntor representable $\mathcal{P}(q^n;\cdot) : \mathcal{P} \to \mathbf{Set}$. Entonces existe una correspondencia biyectiva

$$\theta_{F,q} : Nat(\mathcal{P}(q^n;\cdot), F) \longrightarrow Fq$$

entre las multitransformaciones naturales de $\mathcal{P}(q^n;\cdot)$ a F y los elementos del conjunto Fq.

tenga una demostración.

2.4.2. Hipótesis específicas

• Gracias al lenguaje gráfico de la teoría de grafos (especialmente el concepto de árbol) podemos entender con mayor claridad los axiomas de la definición de multicategoria.

• La principal forma de extender los conceptos de la teoría de categorías a la teoría de multicategorias es dándonos cuenta que la principal diferencia se encuentra en el origen de los morfismos o flechas , para el primer caso solo tenemos un objeto y para el segundo una cadena finita de objetos, entonces basta con re-definir todos los conceptos bajo esta observación.

• Para construir un multifuntor basta con extender las *propiedades* del funtor clásico para el caso de las multicategorias.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Diseño metodológico

La principal herramienta para abordar el problema general de la tesis es mediante el concepto de prueba o demostración matemática, que no es mas que una secuencia finita de razonamientos que terminan en una verdad absoluta conocida como teorema.

3.1.1. Tipo

La investigación de esta tesis es de tipo teórica-documental, así el principal esquema metodológico que utilizamos en este proyecto de investigación es la recopilación de datos existentes en forma documental (libros, textos, revistas, artículos, etc) De esta manera obtenemos antecedentes para profundizar en las teorías y aportaciones ya existentes sobre el tema, para poder derivar en conocimientos nuevos.

3.1.2. Enfoque

El enfoque de esta tesis es de tipo *cualitativo*, es decir, se basa en el análisis no estadístico de datos para luego formular propuestas de interpretación.

3.2. Población y muestra

Debido al tipo de tesis , éste carece de población y por lo tanto de muestra.

3.3. Operacionalización de variables e indicadores

En el siguiente cuadro presentamos las variables y sus indicadores:

Variables	Indicadores
Variable independiente: Una generalización del teorema de Yoneda.	Extensión de los conceptos de la teoría de categorías a dimensiones superiores. Generalización de todos los términos y conceptos involucrados en el lema de Yoneda a dimensiones superiores.
Variable dependiente: Dimensiones superiores (teoría de multicategorias)	Aplicación de los conceptos de la teoría de categorías a dimensiones superiores. Formulación de todos los términos y conceptos involucrados en el lema de Yoneda a dimensiones superiores.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.4.1. Técnicas a emplear

Debido al tipo de tesis, la principal técnica para la recolección de datos, en este caso información teórica, es la vía documental mediante libros, artículos y publicaciones.

3.4.2. Descripción de los instrumentos

El principal instrumento utilizado en esta tesis es el procesamiento y entendimiento de la información. Si lo vemos en sentido funcional , estaríamos hablando del grado de capacidad cerebral para entender las teorías involucradas en la tesis.

3.5. Técnicas para el procesamiento de la información

La principal técnica para el procesamiento de la información es la analítica e inductiva, en la que se estudian teoremas , conceptos y definiciones previas para poder generalizarlos.

Capítulo 4

Resultados

En este capítulo probamos el resultado principal de la tesis, que es el teorema de Yoneda generalizado para el caso de las multicategorias planas. La idea principal de la demostración radica en construir un multifuntor representable con las propiedades requeridas. Después, la prueba se sigue de las ideas de la demostración de Nobuo.

4.1. El multifuntor representable $\mathcal{P}(q^n; \cdot)$

La siguiente proposición nos provee de un funtor representable para las multicategorias planas. Observe que aquì **Set** es la multicategoria del ejemplo 2.2.8.2.

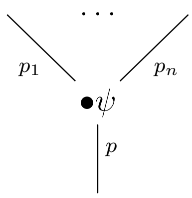
Proposición 4.1.1. Sea $\mathcal{P}$ una multicategoría arbitraria y sea $q \in \mathcal{P}_0$ un objeto de $\mathcal{P}$. Entonces existe un multifuntor, llamado *multifuntor representable* de q, entre multicategorías planas

$$\mathcal{P}(q^n;\cdot) : \mathcal{P} \to \mathbf{Set}$$

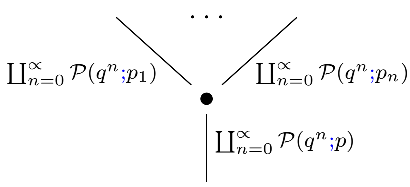
dado por

$$p \mapsto \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p) = \mathcal{P}(;p) \amalg \mathcal{P}(q;p) \amalg \mathcal{P}(q,q;p) \amalg \mathcal{P}(q,q,q;p) \amalg \ldots$$

Demostración. Completamos la definición de $\mathcal{P}(q^n;\cdot)$, para ello dada una operación



en $\mathcal{P}$, le asociamos



es decir una función:

$$\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi) : \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p_1) \times \cdots \times \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p_n) \longrightarrow \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p)$$

definido por

$$(\psi_1, \cdots, \psi_n) \mapsto \psi \circ (\psi_1, \cdots, \psi_n)$$

Ahora observe que tenemos una función:

$$\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi \circ (\psi_1, \cdots, \psi_n))$$

dado por

$$(\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1, \cdots, \psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n) \mapsto$$
$$(\psi \circ (\psi_1, \cdots, \psi_n)) \circ (\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1, \cdots, \psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n)$$

Por otro lado tenemos otra función dado por

$$\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi) \circ (\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi_1) \times \cdots \times \mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi_n))(\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1, \cdots, \psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n) =$$
$$\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi)(\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi_1)(\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1), \cdots, \mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi_n)(\psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n)) =$$
$$\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi)(\psi_1 \circ (\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1), \cdots, \psi_n \circ (\psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n)) =$$
$$\psi \circ (\psi_1 \circ (\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1), \cdots, \psi_n \circ (\psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n)) =$$
$$(\psi \circ (\psi_1, \cdots, \psi_n)) \circ (\psi_1^1, \cdots, \psi_{m_1}^1, \cdots, \psi_1^n, \cdots, \psi_{m_n}^n))$$

De esta manera las dos funciones $\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi \circ (\psi_1, \cdots, \psi_n))$ y $\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi) \circ (\mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi_1), \cdots, \mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi_n))$ son iguales, luego se satisface el primer axioma de la definición 2.2.44. El otro axioma se satisface trivialmente, por lo tanto $\mathcal{P}(q^n;\cdot)$ es un multifuntor.

■

4.2. Resultado principal de la tesis

Ahora si estamos en condiciones de probar el resultado principal de la tesis:

Teorema 4.2.1 (Teorema de Yoneda para multicategorias planas)**.** Considere un multifuntor $F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{Set}$ desde una multicategoria arbitraria $\mathcal{P}$ a la multicategoria $\mathbf{Set}$, un objeto q de $\mathcal{P}$ y su correspondiente multifuntor representable $\mathcal{P}(q^n;\cdot) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{Set}$. Entonces existe una correspondencia biyectiva

$$\theta_{F,q} : Nat(\mathcal{P}(q^n;\cdot), F) \longrightarrow Fq$$

entres las multitransformaciones naturales de $\mathcal{P}(q^n;\cdot)$ a F y los elementos del conjunto Fq.

Demostración. Para una determinada multitransformacion natural

$$\alpha : \mathcal{P}(q^n;\cdot) \Longrightarrow F$$

podemos definir $\theta_{F,q}(\alpha) = \alpha_q(1_q)$.

Por otro lado, para todo $a \in Fq$ y todo objeto p en $\mathcal{P}$, le asociamos la función:

$$\beta(a)_p : \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p) \longrightarrow Fp$$

dado por:

$$\psi \in \mathcal{P}(q, q, \ldots, q;p) \mapsto F\psi(a, a, \ldots, a)$$

Afirmamos que la colección de funciones:

$$\{\beta(a)_p : \mathcal{P}(q^n;\cdot)p \longrightarrow Fp\}_{p\in\mathcal{P}}$$

forman una multitransformacion natural $\beta(a) : \mathcal{P}(q^n;\cdot) \Longrightarrow F$. En efecto, tenemos la colección $(\beta(a)_p)_{p\in\mathcal{P}}$ de funciones, ahora dada una operación $\psi \in \mathcal{P}(p_1, \ldots, p_n;p)$ arbitraria, tenemos que demostrar que

$$F\psi \circ (\beta(a)_{p_1}, \ldots, \beta(a)_{p_n}) = \beta(a)_p \circ \mathcal{P}(q^n;\cdot)\psi.$$

Para ello observe que :

$$\beta(a)_{p_1} \times \ldots \times \beta(a)_{p_n} : \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p_1) \times \ldots \times \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p_n) \longrightarrow Fp_1 \times \ldots \times Fp_n$$

entonces al evaluar la siguiente función:

$$F\psi \circ (\beta(a)_{p_1}, \ldots, \beta(a)_{p_n}) = F\psi \circ (\beta(a)_{p_1} \times \ldots \times \beta(a)_{p_n})$$

en

$$(\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p_1) \times \ldots \times \coprod_{n=0}^{\propto} \mathcal{P}(q^n;p_n)$$

obtenemos

$$F\psi \circ (\beta(a)_{p_1} \times \ldots \times \beta(a)_{p_n})(\psi_1, \ldots, \psi_n) = F\psi \circ (\beta(a)_{p_1}(\psi_1), \ldots, \beta(a)_{p_n}(\psi_n)) =$$
$$F\psi \circ (F\psi_1(a, \ldots (k_1) \ldots, a), \ldots, F\psi_n(a, \ldots (k_n) \ldots, a)) =$$
$$F(\psi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n))(a, \ldots (k_1 + \ldots + k_n) \ldots, a) = \beta(a)_p(\psi \circ (\psi_1, \ldots, \psi_n)) =$$
$$(\beta(a)_p \circ \mathcal{P}(q^n;\cdot)(\psi))(\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

Observe que $(a, \ldots (k_i) \ldots, a)$ significa que a se repite k_i veces , donde $k_i \in \mathbb{N}$.

Finalmente mostremos que tanto $\theta_{F,q}$ como β son inversas el uno al otro. En efecto, dado $a \in Fq$, tenemos:

$$\theta_{F,q}(\beta(a)) = \beta(a)_q(1_q) = F1_q(a) = 1_{Fq}(a) = a$$

Por otro lado, a partir de $\alpha : \mathcal{P}(q^n;\cdot) \Longrightarrow F$ y dado $\psi \in \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(q^n;p)$, tenemos:

$$\beta(\theta_{F,q}(\alpha))_p(\psi) = \beta(\alpha_q(1_q))_p(\psi) = F\psi(\alpha_q(1_q), \ldots, \alpha_q(1_q)) =$$
$$\alpha_p \circ (\psi \circ (1_q, \ldots, 1_q)) = \alpha_p(\psi)$$

De esta manera $\beta(\theta_{F,q}(\alpha)) = \alpha$

■

Capítulo 5

Discusión, conclusiones y recomendaciones

5.1. Discusión

La principal discusión en esta tesis es el tema de *generalización* en teoría de categorías, es decir, siempre que se inventa un concepto en teoría de categorías se le puede elevar de *dimensión* hacia otro concepto en el que se puede elaborar una teoría de tal manera que el concepto inventado resulte un caso particular de este último. Así, una pregunta que surge de la discusión previa es pues si esto siempre ocurre en teoría de categorías. Esta discusión está más ligado a la *filosofía de la matemática* que a la propia teoría de categoría misma, pero dado que cualquier teoría propuesta en matemáticas tiene su trasfondo filosófico, es necesario hacer hincapié en este tipo de cuestiones para tener bien claro de qué manera se pueden introducir conceptos nuevos en teoría de categorías y en general en cualquier parcela del conocimiento matemático.

5.2. Conclusiones

Las principales conclusiones a las que he llegado al realizar esta investigación son las siguientes:

• Fue necesario reformular la definición de multicategoria en el lenguaje gráfico dado por el concepto de árbol.

• La forma en que construimos el multifuntor $\mathcal{P}(q^n;\cdot)$ fue dado, de tal manera que tenga propiedades similares al funtor representable clásico.

• Finalmente la conclusión mas importante en esta tesis es pues que el teorema de Yoneda se sigue cumpliendo en el contexto de las multicategorias planas con sus respectivas variantes naturales.

5.3. Recomendaciones

Existen muchas interrogantes que se desprenden de esta tesis y pueden ir como recomendaciones a futuras investigaciones que se pueda realizar con respecto al teorema de Yoneda en teoría de categorías de dimensiones superiores, por ejemplo es bien sabido que el teorema de Yoneda (aquí usamos la palabra teorema o lema indistintamente para referirnos a dicho resultado), desde su aparición en teoría de categorías clásicas, estuvo inmerso en diferentes discusiones en teoría de categorías superiores como en multicategorias, bicategorias, tricategorias, etc. Así que en una futura investigación se puede conjeturar que el teorema de Yoneda se esconde dentro de la teoría de categorías superiores y en realidad se puede elaborar una teoría general, algo así como *teoría de Yoneda*, que permita tener , de alguna manera, a los casos anteriores como casos particulares. De esta manera la principal recomendación es investigar si el teorema de Yoneda se cumple también en los diferentes conceptos que abarca el mundo de las categorías superiores.

Capítulo 6

Fuentes de información

6.1. Fuentes bibliográficas

Las principales referencias bibliográficas citadas en esta tesis son los siguientes :

REFERENCIAS

[Adàmek et al., 2004] Adàmek, J., Herrlich, H., and Strecker, G. E. (2004). Abstract and concrete categories. the joy of cats.

[Artin et al., 1972] Artin, M., Grothendieck, A., and Verdier, J. (1972). Sèminaire de gèomètrie algèbrique du bois marie-1963-64-thèorie des topos et cohomologie ètale des schèmas-(sga 4)-.

[Awodey, 2010] Awodey, S. (2010). *Category theory*. Oxford University Press.

[Borceux,] Borceux, F. Handbook of categorical algebra 1: Basic category theory, encycl. *Math. Appl*, 50.

[Cheng, 2002] Cheng, E. L.-G. (2002). *Higher-Dimensional Category Theory: opetopic foundations*. PhD thesis, University of Cambridge.

[Diestel, 2017] Diestel, R. (2017). *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated.

[Eilenberg and MacLane, 1945] Eilenberg, S. and MacLane, S. (1945). General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231-294.

[Joyal and Street, 1993] Joyal, A. and Street, R. (1993). Braided tensor categories. *Advances in Mathematics*, 102(1):20-78.

[Lambek, 1969] Lambek, J. (1969). Deductive systems and categories ii. standard constructions and closed categories. In *Category theory, homology theory and their applications I*, pages 76-122. Springer.

[Lane, 1996] Lane, S. (1996). The development and prospects for category theory. *Applied Categorical Structures*, 4(2):129-136.

[Leinster, 1998] Leinster, T. (1998). Basic bicategories. *arXiv preprint math*/9810017.

[Leinster, 2004a] Leinster, T. (2004a). *Higher operads, higher categories*, volume 298. Cambridge University Press.

[Leinster, 2004b] Leinster, T. (2004b). Operads in higher-dimensional category theory. *Theory and Applications of Categories*, 12(3):73-194.

[Mac Lane, 2013] Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science and Business Media.

[Szabo, 1975] Szabo, M. (1975). Polycategories. *Communications in Algebra*, 3(8):663-689.

[Weiss, 2007] Weiss, I. (2007). *Dendroidal sets*. PhD thesis, Utrecht University.

6.2. Fuentes hemerograficas

No se utilizó.

6.3. Fuentes documentales

No se utilizó.

6.4. Fuentes electrónicas

Las principales fuentes electrónicas citadas en esta tesis son los siguientes:

- http://www.mat.univie.ac.at/ westra/yoneda.pdf
- http://www.acsu.buffalo.edu/ wlawvere/concep-3.pdf
- http://bruno.stonek.com/monografia.pdf
- https://math.mit.edu/ ebelmont/operads-talk.pdf

Capítulo 7

Anexos

7.1. Matriz de consistencia

En los siguientes cuadros mostramos los elementos de la matriz de consistencia:

Una generalización del teorema de Yoneda a dimensiones superiores	
Problemas	Objetivos
1. **Problema general**: Probar que el teorema de Yoneda se cumple también para dimensiones superiores. 2. **Problemas específicos**: a) Encontrar un lenguaje grafico que me permita dilucidar los conceptos de la teoría de multicategorias. b) Extender los conceptos de la teoría de categorías a la teoría de multicategorias. c) Construir un multifuntor representable para las multicategorias planas.	1. **Objetivo general**: Demostrar que el teorema de Yoneda se sigue cumpliendo en las multicategorias planas y ver cómo la expresión del lenguaje se hace cada vez más complejo a medida que se va generalizando el teorema. 2. **Objetivos específicos** a) Entender el concepto de árbol, que está dentro de la teoría de grafos, pues gracias a este concepto podremos construir esquemas gráficos que nos permitan entender con mayor claridad las multicategorias y sus axiomas. b) Extender los conceptos de la teoría de categorías, tales como funtor, transformación natural, etc. a la teoría de multicategorias de tal manera que podamos formular con precisión el teorema de Yoneda para multicategorias planas. c) Construir un multifuntor representable para las multicategorias planas.

Una generalización del teorema de Yoneda a dimensiones superiores	
Hipótesis	Metodología
1. **Hipótesis general**: Construir un multifuntor que haga el papel del funtor clásico en la prueba de Yoneda, que permite generalizar de manera satisfactoria dicho teorema a dimensiones superiores. 2. **Hipótesis específicas**: a) El lenguaje gráfico de la teoría de grafos nos permite entender con mayor claridad los axiomas de la definición de multicategoria. b) La principal forma de extender los conceptos de la teoría de categorías a la teoría de multicategorias es dándonos cuenta que la principal diferencia se encuentra en el origen de los morfismos o flechas, para el primer caso solo tenemos un objeto y para el segundo una cadena finita de objetos, entonces basta con re-definir todos los conceptos bajo esta observación. c) Para construir un multifuntor, basta con extender las propiedades del funtor clasico para el caso de las multicategorias.	1. **Tipo de investigación**: Es de tipo teórico-documental, así el principal esquema metodológico que utilizamos es la recopilación de datos existentes en forma documental (libros, textos, revistas, artículos, etc.) 2. **Variables e indicadores**: a) **Variable dependiente**: Dimensiones superiores (Teoría de multicategorias) **Indicadores**: • Aplicación de los conceptos de la teoría de categorías a dimensiones superiores. • Formulación de todos los términos y conceptos involucrados en el lema de Yoneda a dimensiones superiores. b) **Variable independiente**: Una generalización del teorema de Yoneda. **Indicadores**: • Extensión de los conceptos de la teoría de categorías a dimensiones superiores. • Generalización de todos los términos y conceptos involucrados en el lema de Yoneda a dimensiones superiores.