

UNIVERSIDAD NACIONAL JOSÉ FAUSTINO SÁNCHEZ CARRIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**ESTIMACIÓN DE LAS FRECUENCIAS DE IMPACTO DE LA
PARTÍCULA ALFA CON SU BARRERA DE POTENCIAL A TRAVÉS
DE SU ENERGÍA Y PERIODO DE SEMIDESINTEGRACIÓN DEL
NUCLEÍDO RADIACTIVO**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTADO POR:
JORDI OSCAR TORRES MALDONADO**

**ASESOR:
MSc. CARLOS JOB FIESTAS URBINA**

HUACHO – PERÚ

2018

A mis paaas x2

Agradecimientos

Mi profundo agradecimiento al MSc. Carlos Fiestas, por su dedicación y contribución a lo largo del proceso de investigación.

Mi especial agradecimiento al Mo. Julio Valencia, por sus observaciones, ayuda y sugerencias en la parte metodológica de la investigación.

Resumen

La frecuencia de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial es una característica poco conocida, pero importante para el desarrollo de los modelos nucleares. Existen dificultades experimentales para medir directamente las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial. Sin embargo, es posible realizar una estimación de tipo indirecta empleando modelos teóricos; relacionando las frecuencias de impacto con sus energías cinéticas y periodos de semidesintegración.

Teniendo como referencia lo anterior, el objetivo del trabajo fue estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista, utilizando los datos de energías y periodos de semidesintegración de los nucleídos radiactivos: polonio, radio, torio y uranio reportados por la IAEA.

Para entender y explicar el tema de estudio, la metodología de trabajo fue la siguiente: Se determinó la constante del decaimiento de manera formal, basándonos en la aproximación semiclásica que la mecánica cuántica permite. Se establece el modelo de la ecuación que relaciona la constante de decaimiento alfa con la energía cinética de dichas partículas. El modelo mecánico cuántico así obtenido, se compara con las curvas experimentales obtenidas de los datos y a partir de esa comparación se obtiene el parámetro de frecuencia de impacto, objetivo principal del trabajo.

Finalmente se llegó a la conclusión que el análisis mecánico cuántico de la emisión de la partícula alfa concuerda con los datos experimentales reportados para los radioisótopos de estudio. La curva obtenida de la frecuencia de impacto en función de los radios nucleares para los isótopos de cada átomo radiactivo, presenta un comportamiento monótono decreciente.

Palabras clave: Partícula alfa, energía, radioisótopos, periodos de semidesintegración, frecuencia de impacto de la partícula alfa.

Abstract

The alpha particle impact frequency with its potential barrier is a little known feature, but highly important for the development of nuclear models. There are experimental difficulties to measure the impact frequencies directly of the alpha particle with its potential barrier. However, it is possible to make an indirect estimation using theoretical models; relating the impact frequencies with their kinetic energies and half-lives.

The aim of this work was to estimate the alpha particle impact frequencies with its potential barrier from a non-relativistic quantum mechanics model, using the energy data and half-life periods of the radioactive nucleus: polonium, radio, thorium and uranium reported by IAEA.

To understand and explain the topic, the work methodology was as follows: The decay constant was determined in a formal way, based on the semiclassical approach that quantum mechanics allows. An equation is found where the alpha decay constant and the kinetic energy of particles are related, which determine our model. That model is compared with the experimental data curves and the impact frequency parameter is obtained.

In conclusion, the quantum mechanical analysis of the emission of the alpha particle agrees with the experimental data reported for the study radioisotopes. The curves obtained from the impact frequency as a function of the nuclear radius for the isotopes show a decreasing monotonous behavior.

Keywords: Alpha particle, energy, radioisotopes, half-life, alpha particle impact frequency.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	8
Capítulo I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	9
1.1. Descripción de la realidad problemática	9
1.2. Formulación del problema.....	10
1.2.1. Problema General	10
1.2.2. Problema Específico	10
1.3. Objetivos de la investigación.....	11
1.3.1. Objetivo General	11
1.3.2. Objetivo Específico	11
Capítulo II: MARCO TEÓRICO	12
2.1. Antecedentes de la investigación	12
2.2. Bases teóricas	14
2.2.1. Radioactividad	14
2.2.2. Decaimientos radiactivos	15
2.2.6. Decaimiento alfa	22
2.3. Definiciones conceptuales	35
2.4. Formulación de hipótesis	37
2.4.1. Hipótesis General	37
2.4.2. Hipótesis Específica	37
Capítulo III: METODOLOGÍA	38
3.1. Diseño metodológico.....	38
3.1.1. Tipo	38
3.1.2. Enfoque	39
3.2. Población y muestra.....	39
3.3. Operacionalización de variables e indicadores	40
3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos	41
3.4.1. Técnicas a emplear.....	41

3.4.2. Descripción de los instrumentos	41
3.5. Técnicas para el procesamiento de la información.....	41
3.6. Metodología para la obtención del modelo mecánico cuántico.....	42
Capítulo IV: RESULTADOS	43
4.1. Energías cinéticas de la partícula alfa	43
4.2. Frecuencias de impacto	45
Capítulo V: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .	78
5.1. Discusión	78
5.2. Conclusiones.....	79
5.3. Recomendaciones	80
Capítulo VI: FUENTES DE INFORMACIÓN	81
5.1. Referencias	81
5.2. Bibliografía de consulta.....	83
5.3. Fuentes Electrónicas	84
ANEXOS	85
Anexo A	86
Anexo B	87
Anexo C	89

INTRODUCCIÓN

En el universo de los fenómenos físicos, existen varias incógnitas que la mecánica clásica no puede explicar. Entre estas, en el campo de la física nuclear destaca la desintegración o decaimiento de la partícula alfa desde un núcleo.

En 1899 Rutherford y su colaborador, Frederick Soddy, llegaron a la conclusión de que el fenómeno de la radiactividad es el resultado de la transformación espontánea de un elemento químico en otro. Las series sucesivas de decaimientos alfa y beta transforman los pesados e inestables núcleos de elementos radiactivos, reduciendo su masa y número atómico de sus átomos hasta que por último llegan a un estado estable.

Al estudiar la dispersión de una partícula alfa en el uranio, Rutherford observó que la barrera que rodea el núcleo de este elemento debe ser por lo menos de 14×10^{-6} erg de altura. Por otra parte, las partículas alfa emitidas por el propio uranio solo tienen la energía de 8×10^{-6} erg. Y la pregunta que surgió fue ¿Cómo pueden las partículas alfa que salen con una energía tan pequeña pasar una barrera que es varias veces mayor? Según la mecánica clásica esto es naturalmente imposible.

La explicación de por qué ocurría, fue dada independientemente por George Gamow (Ex Unión Soviética), Ronald Gurney (Australia) y Edward Condon (Estados Unidos). Así como la óptica ondulatoria permite la penetración que está completamente prohibida por la óptica geométrica, la mecánica cuántica ayuda a las partículas materiales a realizar proezas que serían completamente imposibles si la mecánica clásica fuera correcta en un cien por ciento.

En este trabajo, explicaremos el fenómeno expuesto, de manera alternativa basándonos en una aproximación semiclásica que permite la mecánica cuántica no relativista.

Capítulo I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

En el curso de física atómica y nuclear visto en pregrado, tocando temas sobre desintegraciones radiactivas espontáneas y la revisión bibliográfica de manera particular de los autores George Gamow, Ronald Gurney y Edward Condon motivaron al autor profundizar su interés en el estudio del fenómeno del decaimiento alfa, en lo que respecta a la determinación de las frecuencias de impacto de dichas partículas, importante para el desarrollo de modelos nucleares; decidiendo considerarlo como tema de la presente tesis.

La investigación es un desarrollo teórico deductivo basado en pistas dejadas por los autores antes mencionados, principios teóricos de la física y el rigor científico que esta disciplina exige a los estudiantes en su etapa formativa. Sin embargo, también se utilizarán datos experimentales de fuentes confiables, medidos por otros autores que ayudarán en la obtención del modelo empírico de la ecuación del decaimiento alfa.

Las obras de los autores antes citados, aportaron a la física teórica y al estudio en particular con su modelo mecánico cuántico de la constante de decaimiento de las partículas alfa, es importante para el desarrollo de los objetivos de esta investigación.

El resultado de sus trabajos constituyó la primera aplicación directa del fenómeno de tunelamiento cuántico, permitiendo modelar el comportamiento propio de un sistema físico, en el cual, una partícula atraviesa una barrera de potencial energéticamente prohibida desde el punto de vista clásico. Estos desarrollos fueron meramente teóricos, los que más tarde fueron corroborados y justificados experimentalmente, por otros autores, dándoles la categoría de teorías aceptadas formalmente.

Mientras en el desarrollo del modelo de los autores antes mencionados, sobre la constante de decaimiento alfa incluyen a la referida frecuencia de impacto de dichas partículas, sin hacer estimaciones de esta; el modelo que se propone en esta tesis, sí pretende hacerlo en base a energías cinéticas y periodos de semidesintegración características de nucleídos con mayor emisión alfa.

Considerando que todas las variables enunciadas, menos la frecuencia de impacto de las partículas alfa, han sido medidas en laboratorios altamente certificados como la International Atomic Energy Agency (IAEA), según se observa en la data proporcionada por esta. Debido a la dificultad experimental de determinarla directamente, induce a tener que hacerlo de manera indirecta, mediante el modelo que se propone.

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema General

¿Será posible estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista?

1.2.2. Problema Específico

¿Será posible estimar las frecuencias de impacto de las partículas alfa con su barrera de potencial, utilizando las datas de energías y períodos de semidesintegración de las partículas alfa reportadas por la IAEA?

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo General

Estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista.

1.3.2. Objetivo Específico

Estimar las frecuencias de impacto de las partículas alfa con su barrera de potencial utilizando las datas de energías y períodos de semidesintegración de las partículas alfa reportadas por la IAEA.

Capítulo II: MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación

2.1.1. Nacionales

En las referencias nacionales revisadas, en relación al estudio que se investigó, no se han encontrado estudios iguales o semejantes, por lo que se considera al presente trabajo como inédito.

2.1.2. Internacionales

Los antecedentes internacionales que se han encontrado y que nos han servido de referencia para el desarrollo de la presente investigación son los siguientes:

- Gamow, G. (1928, August). Zur quantentheorie des atomkerns. *Zeitschrift für Physik*, 51, 204-212.

Resumen:

Es wird der Versuch gemacht, die Prozesse der α -Ausschtrahlung auf Grund der Wellenmechanik näher zu untersuchen und den experimentell festgestellten Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante und Energie der α -Partikel theoretisch zu erhalten.

- Gurney, R., & Condon, E. (1929, February). Quantum mechanics and radioactive disintegration. *Phys. Rev.*, 33 (2), 127-140.

Resumen:

Application of quantum mechanics to a simple model of the nucleus gives the phenomenon of radioactive disintegration. The statistical nature of the quantum mechanics gives directly disintegration as a chance phenomenon without any special hypothesis. §1 contains a presentation of those features of quantum mechanics which are here used and gives a simple calculation of the disintegration constant. §2 discusses the qualitative application of the model to the nucleus. §3 presents quantitative calculations amounting to a theoretical interpretation of the Geiger-Nuttall relation between the rate of disintegration and the energy of the emitted α -particle. In getting this relation one arrives at the rather remarkable conclusion that the law of force between emitted α -particle and the rest of the nucleus is substantially the same in all the atoms even where the decay rates stand in the ratio 10^{22} . §4 calls attention to the natural way in which the paradoxical results of Rutherford and Chadwick on the scattering of fast α -particles by uranium receive explanation with the model here used. §5 discusses certain limitations inherent in the methods employed.

Estos tres autores, son considerados como los padres de la teoría mecánico cuántica de la desintegración alfa. Pese a haber trabajado independientemente en diferentes latitudes, arribaron a los mismos resultados, en lo que respecta al modelamiento de la constante de decaimiento alfa.

Los desarrollos efectuados por los investigadores antes mencionados se han tomado en cuenta para la ejecución de la presente tesis, en lo que respecta al modelamiento del decaimiento alfa y punto de partida para realizar lo siguiente: primero, en la determinación de la constante del decaimiento de manera formal, basándonos en la aproximación semiclásica que la mecánica cuántica permite; segundo, en el modelamiento de la ecuación que relaciona la constante de decaimiento alfa con la energía cinética de dichas partículas; finalmente en la obtención del modelo mecánico cuántico para las frecuencias de impacto de la partícula alfa, objetivo principal del trabajo.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Radioactividad

La radiactividad se define como la desintegración espontánea de un núcleo. Los núcleos radiactivos suelen clasificarse en dos grupos: núcleos inestables que se encuentran en la naturaleza llamados radioactividad natural y núcleos producidos en laboratorios a través de reacciones nucleares denominadas radioactividad artificial.

La radiactividad natural puede manifestarse a través de uno de los siguientes procesos: decaimiento α , decaimiento β , captura electrónica y decaimiento γ . La radiactividad artificial puede incluir el decaimiento a través de protones, neutrones o fisión (Kamal, 2014).

2.2.2. Decaimientos radiactivos

La ley fundamental de la desintegración radiactiva se puede formular de la siguiente manera: Dada una población de nucleídos radiactivos, la probabilidad de que decaiga durante un intervalo dt es λdt . Donde la constante λ se llama la constante de decaimiento. Esta ley es característica para eventos aleatorios y se aplica a todos los tipos de decaimiento radiactivo alfa, beta, gamma, captura electrónica, fisión espontánea y también en el proceso atómico de emisión de fotones por los átomos excitados (Segre, 1965).

La aplicación más simple de esta ley implica una sola sustancia radiactiva. De acuerdo con nuestra ley fundamental, si se tiene N núcleos radiactivos en el tiempo t , el número dN que decaen en el tiempo dt está dado por:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (1)$$

Integrando con la condición de que en un inicio tenemos N_0 nucleones, se obtiene

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

Que puede tomar la forma exponencial

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

La ecuación (2) es otra formulación de la ley fundamental de la desintegración radiactiva. Cuando se multiplica por λ , se convierte en

$$\lambda N(t) = \lambda N_0 \exp(-\lambda t) \quad (3)$$

Donde $\lambda N_0 = A_0$ es la actividad inicial asociada a los N_0 nucleones y $\lambda N = A$ es la actividad en el tiempo t . En términos de la actividad

$$A = A_0 \exp(-\lambda t) \quad (4)$$

O, en forma logarítmica

$$\ln A = \ln A_0 - \lambda t \quad (5)$$

2.2.3. Series radiactivas naturales

Las series naturales tienen su origen en nucleídos cuyos periodos de semidesintegración son comparables con la vida de la tierra. Estas series de elementos radiactivos decaen en hijas que son a su vez, radiactivos a través de varias generaciones, hasta que llegan a un núcleo estable.

En la *tabla 1* se relacionan los nucleídos iniciales (padres) y finales de cada uno de las tres series radioactivas naturales existentes.

Tabla 1. Series radiactivas naturales

Serie	Isótopo inicial	$t_{1/2}$ [años]	Producto final
Torio	${}^{232}_{90}\text{Th}$	1.40×10^{10}	${}^{208}_{82}\text{Pb}$
Actinio	${}^{235}_{92}\text{U}$	7.04×10^8	${}^{207}_{82}\text{Pb}$
Uranio	${}^{238}_{92}\text{U}$	1.47×10^9	${}^{206}_{82}\text{Pb}$

Fuente: Nuclear Data Services de la IAEA.

Cada elemento de la tabla anterior constituye una familia o serie radiactiva natural. Una de ellas es la familia del ${}^{238}\text{U}$, que empieza con

este isótopo radiactivo emisor de partículas α , después de 14 transformaciones llega a un producto final estable que en este caso se trata del isótopo de ^{206}Pb . La masa atómica cambia en cuatro unidades en cada decaimiento α y en una unidad el número atómico en el decaimiento β (β^-), las masas encontradas en varios miembros de esta familia, difieren en múltiplos de cuatro y una fórmula general para las masas aproximadas es $4n + 2$, donde n es un número entero. Por lo tanto, esta serie del uranio también se conoce como serie $4n + 2$, expresión que proporciona el número de masa de cada nucleído de la serie con valores de n de 51 a 59 (Burcham & Joves, 1995).

La *tabla 2* representa los radioisótopos y transformaciones de esta serie del ^{238}U así como sus periodos de semidesintegración y partículas que emiten.

Tabla 2. Familia radiactiva del ^{238}U , o serie $4n + 2$.

Radioelemento y Rayos	$t_{1/2}$ [años, días, horas, minutos, segundos]
Uranium 238	4 500 000 000 años
↓ α	
Thorium 234	24 días
↓ β	
Protactinium 234	1.2 minutos
↓ β	
Uranium 234	240 000 años
↓ α	
Thorium 230	77 000 años
↓ α	
Radium 226	1 600 años
↓ α	
Radon 222	3.8 días
↓ α	
Polonium 218	3.1 minutos
↓ α or ↘ β	
Lead 214 Astatine 218	27 m, 2 s
↓ β ↙ α	
Bismuth 214	20 minutos
↓ β or ↘ α	
Polonium 214 Thallium 210	0.00016 s, 1.3 minutos
↓ α ↙ β	
Lead 210	22 años
↓ β	
Bismuth 210	5.0 días
↓ β or ↘ α	
Polonium 210 Thallium 206	140 días, 4.2 minutos
↓ α ↙ β	
Lead 206	No radioactivo

El torio con masa atómica de 232 es el primer isótopo de otra serie o familia que se encuentra en la naturaleza, con fórmula general $4n$ o serie del torio. El isótopo que se produce como producto final estable es el ^{208}Pb . La familia radiactiva del torio se encuentra representada en la *tabla 3*.

Tabla 3. Familia radiactiva del ^{232}Th , o serie $4n$.

Radioelemento y Rayos	$t_{1/2}$ [años, días, horas, minutos, segundos]
Thorium 232	14 000 000 000 años
↓ α	
Radium 228	5.8 años
↓ β	
Actinium 228	6.1 horas
↓ β	
Thorium 228	1.9 años
↓ α	
Radium 224	3.7 días
↓ α	
Radon 220	56 s
↓ α	
Polonium 216	0.15 s
↓ α or ↘ β	
Lead 212 Astatine 216	11 h, 0.0003 s
↓ β ↙ α	
Bismuth 212	61 minutos
↓ β or ↘ α	
Polonium 212 Thallium 208	0.0000003 s, 3.1 minutos
↓ α ↘ β	
Lead 208	No radiactivo

La serie del ^{235}U es conocida también como serie o familia del actinio o serie $4n + 3$, siendo el ^{235}U el isótopo padre el cual después de varios procesos de decaimientos tiene como producto final el isótopo estable ^{207}Pb .

Tabla 4. Familia radiactiva del ^{235}U , o serie $4n + 3$.

Radioelemento y Rayos	$t_{1/2}$ [años, días, horas, minutos, segundos]
Uranium 235	710 000 000 años
↓ α	
Thorium 231	26 horas
↓ β	
Protactinium 231	33 000 años
↓ α	
Actinium 227	22 años
↓ β or ↘ α	
Thorium 227 Francium 223	19 d, 22 minutos
↓ α ↙ β	
Radium 223	11 días
↓ α	
Radon 219	4.0 s
↓ α	
Polonium 215	0.0018 s
↓ α or ↘ β	
Lead 211 Astatine 215	36 m, 0.0001 s
↓ β ↙ α	
Bismuth 211	2.1 minutos
↓ β or ↘ α	
Polonium 211) Thallium 207	0.005 s, 4.8 minutos
↓ α ↙ β	
Lead 207	No radioactivo

Fuentes: Malley, M. (2011). *Radioactivity, a history of a mysterious*. United States of America: Oxford University Press, Inc.

2.2.4. Constante de desintegración

La constante de desintegración o constante de decaimiento λ , se define como la probabilidad de que un núcleo radiactivo se desintegre en la unidad de tiempo.

Si N representa el número de núcleos radiactivos presentes en un tiempo dado y dN representa el número de desintegraciones durante un intervalo de tiempo dt , entonces la probabilidad de desintegración de dichos núcleos es

$$-\frac{dN}{N} \quad (6)$$

Donde el signo menos indica que dN siempre es negativo. Siendo la constante de desintegración

$$\lambda = -\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} \quad (7)$$

En el Sistema Internacional, su unidad es s^{-1} .

2.2.5. Periodo de semidesintegración

El periodo de semidesintegración, $t_{1/2}$ de una desintegración radiactiva se define como el intervalo de tiempo en el que el número original de núcleos se reduce a la mitad (Meyerhof, 1967), o el tiempo en el cual la actividad disminuye a la mitad de la actividad inicial (Acosta, Cowan, & Graham, 1983).

Cuando $t = t_{1/2}$, entonces, el número de átomos presentes de una clase dada es $N = 1/2 N_0$, y de la ecuación de las desintegraciones radioactivas

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 \exp(-\lambda t_{1/2}) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} = \exp(-\lambda t_{1/2})$$

Tomando logaritmo natural de ambos lados

$$-\ln 2 = -\lambda t_{1/2} \quad (9)$$

Se obtiene el periodo de semidesintegración, dado por

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (10)$$

Cantidad que en el Sistema internacional de unidades se mide en s. Este valor es característico para cada isótopo radiactivo, y según el caso puede variar desde millonésimas de segundo a miles de millones de años.

2.2.6. Decaimiento alfa

Aunque no se conoce la naturaleza exacta de las fuerzas que actúan en la partícula alfa, sí se sabe que hay fuerzas repulsivas debido a las cargas y fuerzas atractivas muy fuertes de un carácter específicamente nuclear. El efecto de estas fuerzas podría explicarse considerando una energía potencial negativa $-V_0$ a una distancia R del centro del núcleo ($R =$ radio del núcleo).

Las fuerzas nucleares son de tan corto alcance que fuera del núcleo solo actúan las fuerzas de repulsión electrostática entre la partícula alfa que lleva consigo la carga $+2e$ y el núcleo hija que queda después de la desintegración. Por otra parte, la energía potencial V de una partícula alfa

fuera del núcleo varía inversamente con su distancia r desde el centro del núcleo, donde $r > R$, como se muestra en *Figura 1*.

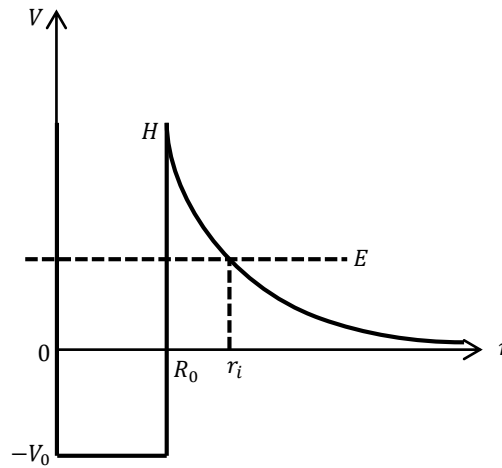


Figura 1. Energía Potencial de una partícula alfa en función de su distancia al centro del núcleo.

En aras de la simplicidad, el potencial de Coulomb y el potencial nuclear constante $-V_0$ se unen en $r = R_0$. El valor de la energía potencial en $r = R_0$ se designa por la letra H , denominada también altura de la barrera de potencial para la partícula alfa.

El orden de magnitud de la altura de la barrera de potencial para la mayoría de los elementos pesados es de aproximadamente 30 MeV . Esto representa la energía mínima que una partícula alfa debe tener, de acuerdo con las ideas clásicas, para poder escapar del núcleo.

Por otra parte, las partículas alfas emitidas por los núcleos radiactivos tienen energías del orden de 5 o 6 MeV , y en casos raros, aproximadamente 11 MeV . Por tanto, podemos imaginar que la partícula alfa recibe suficiente energía en su interacción con otros núcleos para elevarla a un nivel de energía E igual a la energía cinética que tiene cuando está a una gran distancia al núcleo (Semat & Albright, 1972).

Las propiedades de onda de una partícula en una barrera de potencial rectangular hicieron posible la penetración de una partícula, a pesar de que la energía podría ser demasiado baja para la transmisión de acuerdo con la mecánica clásica. Para un solo encuentro entre una partícula y una barrera de forma arbitraria, la probabilidad transmisión es aproximadamente

$$\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{R_0}^{r_i}\sqrt{2m[V(r)-E]}dr\right) \quad (11)$$

Donde $V(r)$ es la energía potencial como función de r y m la masa de la partícula del alfa.

El problema del decaimiento de la partícula alfa es determinar la vida media τ de la partícula alfa en el núcleo; la cual es el recíproco de la probabilidad por unidad de tiempo (λ) para el escape de la partícula del núcleo.

En el interior del pozo de potencial, la partícula alfa oscila periódicamente y golpea la pared potencial. Si se asume que se mueve con una velocidad media v_0 , entonces la frecuencia con que golpea la pared es $v_0/2R_0$. Por tanto, la multiplicación de la frecuencia con la probabilidad de escape será igual a la probabilidad de escape por unidad de tiempo de la partícula alfa. De acuerdo con (Semat & Albright, 1972) lo expresado anteriormente tiene la forma

$$\lambda = \frac{v_0}{2R_0}\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{R_0}^{r_i}\sqrt{2m(V_i-E)}dr\right) \quad (12)$$

El argumento de la exponencial, generalmente se designa por G con signo negativo, por tanto

$$\lambda = \text{const exp}(-G) \quad (13)$$

La que constituye una forma de la ley de Geiger-Nuttall, donde G es una función de la energía.

2.2.7. Energía cinética alfa

En físicas nuclear, la emisión espontánea de una partícula α se puede representar mediante el siguiente proceso



Si se asume que el núcleo padre, P , se encuentra en reposo. Entonces la energía inicial del sistema es solo la energía en reposo de P

$$m_p c^2$$

El estado final se compone del núcleo hija D y He , cada uno de los cuales estará en movimiento. Por lo tanto, la energía total final es

$$m_d c^2 + K_d + m_\alpha c^2 + K_\alpha$$

Donde K_d y K_α representan las energías cinéticas del núcleo hija y de la partícula α , respectivamente. Por lo tanto, en términos de conservación de la masa energía (Krane, 1987), tenemos

$$m_p c^2 = m_d c^2 + K_d + m_\alpha c^2 + K_\alpha \quad (15)$$

$$(m_p - m_d - m_\alpha) c^2 = K_d + K_\alpha$$

La cantidad en el lado izquierdo de esta última ecuación es la energía neta liberada en la desintegración, llamado el valor Q_α

$$Q_\alpha = (m_p - m_d - m_\alpha)c^2 \quad (16)$$

El valor Q_α es también igual a la energía cinética total dado a los fragmentos de desintegración:

$$Q_\alpha = K_d + K_\alpha \quad (17)$$

Para partículas no relativistas, las energías cinéticas se pueden escribir como:

$$K_d = \frac{1}{2}m_d v_d^2$$
$$K_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \quad (18)$$

Donde v_d y v_α representación de la magnitud de las velocidades de la hija y de la partícula α .

Dado que el núcleo padre se desintegra desde el reposo, el núcleo hija y la partícula alfa deben moverse necesariamente en direcciones opuestas para conservar el momento lineal, satisfaciendo

$$m_d v_d = m_\alpha v_\alpha$$
$$v_d = \frac{m_\alpha}{m_d} v_\alpha \quad (19)$$

Cuando la masa del núcleo hija es mucho mayor que la de la partícula α , entonces, $v_d \ll v_\alpha$. Eliminemos v_d y escribamos expresiones para K_d y K_α en términos del valor Q_α (Das & Ferbel, 2005)

$$\begin{aligned}
 K_d + K_\alpha &= \frac{1}{2}m_d v_d^2 + \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_d \left(\frac{m_\alpha}{m_d} v_\alpha\right)^2 + \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{m_\alpha}{m_d} + 1\right) \\
 K_d + K_\alpha &= K_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{m_d} + 1\right) \tag{20}
 \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (17), esto puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 K_\alpha &= \frac{m_d}{m_\alpha + m_d} Q_\alpha \\
 K_\alpha &= \frac{Q_\alpha}{1 + \frac{m_\alpha}{m_d}} \tag{21}
 \end{aligned}$$

La energía cinética de la partícula α emitida no puede ser negativa, es decir, $K_\alpha \geq 0$. En consecuencia, para que se produzca un decaimiento alfa, se debe tener un proceso exotérmico.

2.2.8. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

La ecuación de Schrödinger no relativista dependiente del tiempo, se puede escribir de la forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (22)$$

Cuando V es independiente de t . Podemos resolver la ecuación de Schrödinger usando el método de separación de variables, por lo tanto

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t) \quad (23)$$

Derivando respecto a t y x , tenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi \quad (24)$$

Reemplazando la ecuación (24) en (22), podemos describir la ecuación de Schrödinger como

$$i\hbar \psi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} \varphi + V\psi\varphi \quad (25)$$

O, dividiendo por $\psi\varphi$

$$i\hbar \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V \quad (26)$$

Como el primer factor de Ψ , es función de x y el segundo de t , la igualdad solo se producirá si es igual a una constante que llamaremos E , por representar la energía del sistema (Griffiths, 1995).

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{iE}{\hbar}\varphi \quad (27)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi \quad (28)$$

La primera ecuación, (27), se resuelve fácilmente al multiplicar por dt e integrar; resultando una solución general $Cexp(-iEt/\hbar)$, pero debemos absorber la constante C en ψ ya que la cantidad de interés es el producto $\psi\varphi$. Entonces

$$\varphi(t) = exp(-iEt/\hbar) \quad (29)$$

La segunda ecuación, (28), es llamada ecuación de Schrödinger independiente del tiempo; debido a que no definimos el potencial $V(x)$, escribamos como solución general $\psi(x)$. Por tanto, la solución para potenciales no dependientes del tiempo será:

$$\Psi(x, t) = \psi(x)exp(-iEt/\hbar) \quad (30)$$

Esta ecuación es llamada función de onda de los estados estacionarios, debido a que tiene la energía bien definida.

2.2.9. Efecto túnel

El efecto túnel o tunelamiento cuántico es un fenómeno cuántico, donde una partícula microscópica puede penetrar y pasar a través de

una barrera de potencial. Esta barrera se supone que es mayor que la energía cinética de la partícula, por lo tanto, un movimiento de este tipo no está permitido por las leyes de la dinámica clásica (Razavy, 2003).

Los problemas más simples del tunelamiento cuántico son unidimensionales y la mayor parte de la investigación se realiza resolviéndolos.

La extensión del estudio del tunelamiento unidimensional a dimensiones mayores no es sencillo de resolver. Además, hay ciertas características que aparecen en un tunelamiento de dos o tres dimensiones, que no aparecen en el movimiento unidimensional.

2.2.10. Aproximación semiclásica (Método WKB)

Considérese la ecuación de Schrödinger unidimensional

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (31)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{\hbar^2} p^2(x)\psi(x) = 0 \quad (32)$$

En la que el momento lineal de una partícula es:

$$p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]} \quad (33)$$

Donde, E es la energía total, $V(r)$ es la energía potencial y m la masa de la partícula. Vamos a introducir la cantidad S (que es una función de x con dimensiones de acción), que es conectada con la función de onda por la relación:

$$\psi(x) = A(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} \quad (34)$$

Y obtenemos de (31), la ecuación de diferencial no lineal para esta cantidad

$$\frac{(\nabla S)^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S + V = E \quad (35)$$

Supongamos ahora que el sistema se encuentra en un estado semiclásico, tal que se cumple:

$$\hbar |\nabla^2 S| \ll (\nabla S)^2 \quad (36)$$

En tal caso la ecuación puede aproximarse a:

$$\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = E \quad (37)$$

La solución de esta ecuación se presenta como una serie de potencias de la constante de Planck \hbar (el caso clásico puro corresponde al límite $\hbar \rightarrow 0$):

$$S = S(x, t) = S_0(x, t) + S_1(x, t)\hbar + S_2(x, t)\hbar^2 + \dots \quad (38)$$

Los dos primeros términos de esta expansión son de la forma:

$$S_0 = \int_{x_0}^x p dx \quad (39)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \ln p(x) \quad (40)$$

Por lo tanto, en la aproximación WKB, usaremos el primer término S_0 , resultando dos soluciones linealmente independientes que representan la función de onda incidente y reflejada (Karnakov & Krainov, 1012).

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx \right] + \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx \right] \quad (41)$$

Esta expresión se refiere al caso $E > V$, cuando p es real. Según (Migdal & Krainov, 1969) en el caso $E < V$ la solución aumentará o disminuirá exponencialmente, en la forma

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p| dx \right] + \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p| dx \right] \quad (42)$$

De acuerdo con (Child, 2014), la aproximación que conduce a (41) es válida cuando se cumple la condición

$$|p^2| \gg \hbar \left| \frac{dp}{dx} \right| \quad (43)$$

o alternativamente

$$\frac{\lambda \left| \frac{dp}{dx} \right|}{p} \ll 1 \quad (44)$$

Donde, $\lambda = (\hbar/p)$ es la longitud de onda de Broglie de la partícula.

Nótese, por lo tanto, que la solución WKB dejará de ser aceptable en aquellas regiones cercanas a los puntos de inflexión, es decir, en aquellos puntos para los que $p(x) = 0$, que corresponden a los de separación de las zonas permitidas y prohibidas en el movimiento clásico.

2.2.11. Ecuaciones de conexión

Las funciones de onda WKB (41) y (42) dan soluciones aproximadas de la ecuación de Schrödinger para las regiones suficientemente lejanas a la izquierda o hacia la derecha de los puntos de inflexión clásicos.

Para relacionar estas constantes, podemos utilizar condiciones coincidentes de las soluciones WKB. Para las energías potenciales simples representadas en la *figura 2* y 3. La expansión lineal de Taylor de estas energías potenciales se supone que es válida en la vecindad de ambos puntos de inflexión clásicos x_1, x_2 :

$$U(x) = U(x_0) + U'(x_0)(x - x_0) \quad (45)$$

Aquí, $x_0 = x_1$, impacto con la barrera de potencial (*Figura 2*) o $x_0 = x_2$, salida de la barrera de potencial (*Figura 3*). Suponemos también que esta expansión es válida hasta esos valores de x en ambos lados de x_0 , en el que la condición WKB es aplicable (Liboff, 1980).

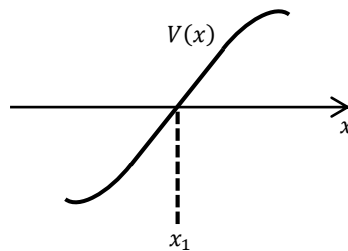


Figura 2. Potencial en la vecindad del punto de inflexión x_1 .

A la derecha del punto de inflexión, $x = x_1$, la solución exponencial decreciente conecta así a una solución oscilatoria según

$$\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (46)$$

Mientras que la solución exponencial creciente conecta a una oscilatoria de acuerdo a

$$-\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (47)$$

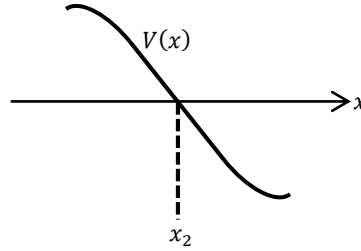


Figura 3. Potencial en la vecindad del punto de inflexión x_2 .

A la izquierda del punto de inflexión (*Figura 3*), $x = x_2$, la solución exponencial creciente conecta en una solución oscilatoria según

$$\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (48)$$

Mientras que una solución exponencial decreciente conecta a una solución oscilatoria según

$$-\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (49)$$

Las ecuaciones (46) y (48) significan que los exponenciales crecientes o decrecientes han de empalmarse con funciones sinusoidales de fase y amplitud dadas al otro lado de la barrera de potencial.

2.3. Definiciones conceptuales

2.3.1. Partícula alfa

Núcleo de un átomo de helio, formado por dos neutrones y dos protones, emitido por ciertos núcleos radiactivos.

2.3.2. Desintegración radiactiva

Llamado también decaimiento radiactivo, es la transformación de un núcleo inestable en otro tipo de núcleo.

2.3.3. Vida media

Tiempo promedio que se atribuye a una partícula elemental o núcleo radiactivo que se encuentra en un cierto estado hasta que ocurre una desintegración.

2.3.4. Fuerza eléctrica

Fuerza que ejerce una carga eléctrica sobre otra. Cuando las cargas tienen igual signo, se repelen y cuando tienen signo contrario se atraen.

2.3.5. Fuerza nuclear

Fuerza de atracción dentro de un núcleo que mantiene unidos a los neutrones y protones. Parte de esta fuerza nuclear se le llama interacción fuerte. La interacción fuerte es una fuerza de atracción que se manifiesta

entre protones, neutrones y mesones; sin embargo, solo actúa en distancias muy cortas, de 10^{-15} metros. La interacción débil es la fuerza nuclear responsable de la emisión beta (electrones).

2.3.6. Núcleo hija

Núcleo radiactivo más ligero formado a partir de la transformación nuclear de un núcleo radiactivo más pesado que se refiere como su padre.

2.3.7. Barrera de potencial

Lugar del espacio con un potencial máximo. De acuerdo con la teoría clásica, una partícula debe poseer una energía más elevada que la barrera de potencial para poder atravesarla. Sin embargo, según la mecánica cuántica, existe una probabilidad finita de que partículas con menor energía que la barrera pasen a través de ella (efecto túnel).

2.3.8. Energía potencial eléctrica

Es la energía que posee una carga en virtud de su ubicación en un campo eléctrico.

2.3.9. Frecuencia

Para un objeto o medio vibratorio, la cantidad de vibraciones por unidad de tiempo. Para una onda, la cantidad de crestas que pasan por determinado punto en la unidad de tiempo. La frecuencia se expresa en Hertz y equivale a una vibración por segundo (s^{-1}).

2.4. Formulación de hipótesis

2.4.1. Hipótesis General

Es posible estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista.

2.4.2. Hipótesis Específica

Es posible estimar las frecuencias de impacto de las partículas alfa con su barrera de potencial utilizando las datas de energías y períodos de semidesintegración de las partículas alfa reportadas por la IAEA.

Capítulo III: METODOLOGÍA

3.1. Diseño metodológico

3.1.1. Tipo

Es una investigación aplicada, porque se utiliza leyes, principios y teorías para construir un modelo cuántico semiempírico que relacione a las variables de estudio y que a través de él se usen datos experimentales para procesarlos mediante técnicas de simulación.

El método empleado en la investigación es el deductivo, dado que en el desarrollo del modelo mecánico cuántico no relativista propuesto de la desintegración alfa se han utilizado teorías y pistas dejadas por otros autores que tienen relación con el tema.

Sin embargo, en una parte de la investigación se utilizará el método inductivo debido a que se utilizarán datos de energías y periodos de desintegración medidas por otros autores (reportada por la IAEA) que correlacionadas darán lugar a un modelo matemático, que constituye un aporte del presente estudio, y que servirá para contrastar la parte teórica desarrollada y obtener nueva información, en este caso, las frecuencias de impacto de las partículas alfa.

Lo expuesto en el párrafo anterior tendrá un matiz de nivel cuasi experimental debido a que en la modelación se utilizarán datos experimentales obtenidos con técnicas de simulación para arribar a los objetivos trazados.

3.1.2. Enfoque

En una primera etapa, el trabajo tendrá un enfoque cualitativo lógico, que permitirá obtener el modelo mecánico cuántico no relativista deseado. En otra parte del trabajo se presentan los procesos de simulación, donde se utilizaron datos numéricos de la información adquirida, siendo este el enfoque cuantitativo del trabajo.

3.2. Población y muestra

3.2.1. Población

Nuestra población comprende a todos aquellos nucleídos emisores alfa reportados en la base de datos de la International Atomic Energy Agency, IAEA.

3.2.2. Muestra

Nuestra muestra comprende solo a aquellos nucleídos con mayor número de isotopos radiactivos alfa. Bajo este criterio resultan los siguientes nucleídos: polonio, radio, torio y uranio.

3.3. Operacionalización de variables e indicadores

Tabla 5. Descripción de las variables e indicadores

Variable	Dimensiones	Indicadores	Unidades
VI: Modelo mecánico cuántico no relativista	- Energía cinética	Energía cinética que posee la partícula alfa al ser emitida por un núcleo radiactivo	MeV
	- Periodo de semidesintegración	Logaritmo de la constante de decaimiento	Adimensional
VD: Frecuencia de impacto	- Frecuencia	Número de impactos que realiza la partícula alfa con la barrera de potencial en la unidad de tiempo	Hz

3.3.1. Definición de las variables de la hipótesis

3.3.1.1. Variable Independiente

La variable independiente de este trabajo es: Modelo mecánico cuántico no relativista: ecuación del decaimiento alfa.

3.3.1.2. Variable Dependiente:

En esta tesis la variable dependiente es: Frecuencia de impacto: la cual se mide en Hz y significa número de impacto que realiza la partícula alfa en la unidad de tiempo con la barrera de potencial.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.4.1. Técnicas a emplear

Los datos para la prueba del modelo se capturaron directamente de una fuente secundaria confiable como es la International Atomic Energy Agency, IAEA. Por tanto, se recurrió a la observación y selección de la data útil para la investigación, basada en las teorías físicas asociadas con el estudio.

3.4.2. Descripción de los instrumentos

La portada web de la IAEA acopiada a través de la red de internet

3.5. Técnicas para el procesamiento de la información

3.5.1. Técnicas a emplear

Las técnicas que se utilizaron para el procesamiento de la información son la computacional y la estadística, las cuales permitirán construir el modelo experimental basado en la data procesada.

El instrumento que se utilizó para procesar la data fue un computador personal y el software Microsoft Office 2016, Excel; utilizando a su vez sus herramientas gráficas y estadísticas de correlación lineal.

El análisis de la información se realizó a través de la lectura de los gráficos y ecuaciones de regresión lineal obtenidas, con sus respectivos parámetros.

3.6. Metodología para la obtención del modelo mecánico cuántico

3.6.1. Metodología

Se siguió un proceso lógico mental deductivo, debido a que se utilizaron teorías y pistas dejadas por otros autores, induciendo a proseguir en el trabajo iniciado por ellos.

En la sección de resultados se puede observar claramente los pasos de la deducción que se siguen para llegar al modelo mecánico cuántico no relativista deseado, todo ello basado en el método de desarrollo teórico formal que provee la física.

El modelo mecánico cuántico obtenido, como se indicó anteriormente, se compara con las curvas experimentales obtenidas y a partir de esa comparación se obtienen los parámetros asociados con los objetivos de la investigación.

Capítulo IV: RESULTADOS

4.1. Energías cinéticas de la partícula alfa

Usando la ecuación (21) deducida en el marco teórico y los datos de masas atómicas y energías alfa encontradas en la Nuclear Data Services de la IAEA, se determinó las energías cinéticas de las partículas alfa.

Tabla 6. Energías cinéticas para los isótopos radiactivos alfa del polonio.

Símbolo	A	Z	M [uma]	m_d [uma]	Q_α [MeV]	K_α [MeV]
Po	192	84	191,9913359	187,9808748	7,31955325	7,166950183
Po	193	84	192,9910257	188,980807	7,09372366	6,946595151
Po	194	84	193,9881861	189,978082	6,98700318	6,842833148
Po	195	84	194,9881255	190,978276	6,74986280	6,611300378
Po	196	84	195,9855259	191,975775	6,65798241	6,522001787
Po	197	84	196,9856595	192,9761732	6,41151319	6,28123142
Po	198	84	197,9833891	193,9740123	6,30959137	6,182026855
Po	199	84	198,9836671	194,9745429	6,0742219	5,952033494
Po	200	84	199,9817988	195,9727742	5,98141186	5,861691028
Po	201	84	200,9822598	196,9734312	5,79891172	5,683421617
Po	202	84	201,9807577	197,9720341	5,7010517	5,58807193
Po	206	84	205,980474	201,972152	5,3269513	5,223435349
Po	208	84	207,9812461	203,973044	5,2153013	5,11493002
Po	209	84	208,9824308	204,9744822	4,97923136	4,88386259
Po	210	84	209,9828741	205,9744657	5,407457	5,30437953
Po	211	84	210,9866536	206,9758973	7,5944851	7,450405439
Po	216	84	216,0019152	211,9918977	6,9063151	6,778333882
Po	218	84	218,0089735	213,9998059	6,114689	6,002421094

Fuente: Tabla elaborada por el autor.

Tabla 7. Energías cinéticas para los isótopos radiactivos
alfa del radio.

Símbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	Q_{α} [MeV]	K_{α} [MeV]
Ra	208	88	208,0018411	203,9914299	7,27305509	7,133093604
Ra	209	88	209,0019905	204,9917188	7,14303269	7,006231242
Ra	210	88	210,0004942	205,9902142	7,15080327	7,014504187
Ra	211	88	211,0008932	206,9907303	7,04182308	6,908237703
Ra	212	88	211,9997867	207,9896347	7,03164167	6,89887798
Ra	213	88	213,0003843	208,9904145	6,86184229	6,732893311
Ra	214	88	214,0000997	209,9896891	7,27251261	7,136484427
Ra	220	88	220,0110259	216,0002719	7,59238565	7,454254239
Ra	221	88	221,0139177	217,003928	6,88039195	6,755782605
Ra	222	88	222,0153748	218,0056016	6,67882429	6,558411246
Ra	223	88	223,0185023	219,0094804	5,9789921	5,871681622
Ra	224	88	224,020212	220,0113941	5,7888515	5,685418339
Ra	226	88	226,0254103	222,0175782	4,8706225	4,784368391

Fuente: Tabla elaborada por el autor.

Tabla 8. Energías cinéticas para los isótopos radiactivos
alfa del torio.

Símbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	Q_{α} [MeV]	K_{α} [MeV]
Th	227	90	227,0277042	223,0185023	6,146601	6,038230436
Th	228	90	228,0287413	224,020212	5,5200822	5,423185322
Th	229	90	229,0317627	225,0236119	5,16756102	5,07724954
Th	230	90	230,0331341	226,0254103	4,76976152	4,686765268
Th	232	90	232,0380558	228,0310707	4,0816014	4,011193382

Fuente: Tabla elaborada por el autor.

Tabla 9. Energías cinéticas para los isótopos radiactivos
alfa del uranio

Símbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	Q_{α} [MeV]	K_{α} [MeV]
U	233	92	233,0396355	229,0317627	4,90856118	4,824251628
U	234	92	234,0409523	230,0331341	4,8576769	4,774598334
U	235	92	235,0439301	231,0363046	4,678197	4,598529482
U	236	92	236,0455682	232,0380558	4,5728986	4,495354761
U	238	92	238,0507884	234,0436014	4,26975294	4,197959621

Fuente: Tabla elaborada por el autor.

4.2. Frecuencias de impacto

La ecuación de onda de Schrödinger independiente del tiempo se puede escribir en la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi = E\psi \quad (50)$$

Representemos la función de onda en la forma

$$\psi = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\} \quad (51)$$

Hallando el gradiente de ψ , podemos escribir

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}$$

$$\nabla\psi = \frac{\partial}{\partial x}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\mathbf{k}$$

$$\nabla\psi = \frac{i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\frac{\partial S(x)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\frac{\partial S(x)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\frac{\partial S(x)}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\nabla\psi = \frac{i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\left(\frac{\partial S(x)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial S(x)}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial S(x)}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$\nabla\psi = \frac{i}{\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\}\nabla S(x)$$

$$\nabla\psi = \frac{i}{\hbar}\psi\nabla S(x) \quad (52)$$

Por tanto, al aplicar el operador de Laplace y reemplazando la ecuación (52), tenemos

$$\nabla^2\psi = \nabla \cdot [\nabla\psi] = \nabla \cdot \left[\frac{i}{\hbar} \psi \nabla S(x) \right] = \frac{i}{\hbar} [\nabla^2 S(x)]\psi - \frac{[\nabla S(x)]^2}{\hbar^2} \psi \quad (53)$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación (50), obtenemos la función para la función $S(x)$

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{i}{\hbar} [\nabla^2 S(x)]\psi - \frac{[\nabla S(x)]^2}{\hbar^2} \psi \right\} + V(r)\psi &= E\psi \\ -\frac{i\hbar}{2m} [\nabla^2 S(x)]\psi + \frac{1}{2m} [\nabla S(x)]^2\psi + V(r)\psi &= E\psi \\ \frac{[\nabla S(x)]^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S(x) + V(r) &= E \end{aligned} \quad (54)$$

En el límite, $\hbar \rightarrow 0$, obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi independiente del tiempo

$$\frac{[\nabla S(x)]^2}{2m} + V(r) = E \quad (55)$$

Dado que el sistema se supone casi clásico por sus propiedades, determinemos $S(x)$ en potencias de \hbar en forma de serie

$$S(x) = S_0(x) + (i\hbar)S_1(x) + (i\hbar)^2 S_2(x) + (i\hbar)^3 S_3(x) + \dots \quad (56)$$

Aplicando el gradiente y elevando al cuadrado y ordenando términos

$$\begin{aligned} \nabla S(x) &= \nabla S_0(x) + (i\hbar)\nabla S_1(x) + (i\hbar)^2 \nabla S_2(x) + (i\hbar)^3 \nabla S_3(x) + \dots \\ [\nabla S(x)]^2 &= [\nabla S_0(x)]^2 + (i\hbar)[\nabla S_0(x)][\nabla S_1(x)] - \hbar^2 [\nabla S_0(x)][\nabla S_2(x)] + \\ &\quad (i\hbar)[\nabla S_1(x)][\nabla S_0(x)] - \hbar^2 [\nabla S_1(x)]^2 - (i\hbar^3)[\nabla S_1(x)][\nabla S_2(x)] - \end{aligned}$$

$$\hbar^2[\nabla S_2(x)][\nabla S_0(x)] - (i\hbar^3)[\nabla S_2(x)][\nabla S_1(x)] + \dots$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} [\nabla S(x)]^2 = & [\nabla S_0(x)]^2 + 2(i\hbar)[\nabla S_0(x)][\nabla S_1(x)] - 2\hbar^2[\nabla S_0(x)][\nabla S_2(x)] - \\ & \hbar^2[\nabla S_1(x)]^2 + \dots \end{aligned} \quad (57)$$

Por otra parte, el laplaciano de la variable de acción puede escribirse como

$$\nabla^2 S(x) = \nabla^2 S_0(x) + (i\hbar)\nabla^2 S_1(x) + (i\hbar)^2\nabla^2 S_2(x) + \dots \quad (58)$$

Reemplazando las expresiones (57) y (58) en (54), tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} \{ [\nabla S_0(x)]^2 + 2(i\hbar)[\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_1(x)] - 2\hbar^2[\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_2(x)] - \hbar^2[\nabla S_1(x)]^2 + \dots \} \\ & - \frac{i\hbar}{2m} [\nabla^2 S_0(x) + (i\hbar)\nabla^2 S_1(x) + (i\hbar)^2\nabla^2 S_2(x) + \dots] + V(r) - E = 0 \\ & \frac{1}{2m} [\nabla S_0(x)]^2 + \frac{(i\hbar)}{m} [\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_1(x)] - \frac{\hbar^2}{m} [\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_2(x)] - \frac{\hbar^2}{2m} [\nabla S_1(x)]^2 + \dots \\ & - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S_0(x) + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 S_1(x) - \frac{(i\hbar)^3}{2m} \nabla^2 S_2(x) + \dots + V(r) - E = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

Ordenando términos, podemos escribir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} [\nabla S_0(x)]^2 + \frac{i\hbar}{m} \left\{ [\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_1(x)] - \frac{1}{2} \nabla^2 S_0(x) \right\} - \frac{\hbar^2}{m} \left\{ [\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_2(x)] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\nabla S_1(x)]^2 - \frac{1}{2} \nabla^2 S_1(x) \right\} + V(r) + \phi(\hbar^*) = E \end{aligned} \quad (60)$$

Anulando por separado los coeficientes de cada potencia de \hbar , tenemos

$$\frac{1}{2m} [\nabla S_0(x)]^2 + V(r) = E \quad (61)$$

$$\frac{(i\hbar)}{m} [\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_1(x)] - \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 S_0(x) = 0$$

$$[\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_1(x)] - \frac{1}{2} \nabla^2 S_0(x) = 0 \quad (62)$$

$$[\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_2(x)] + \frac{1}{2} [\nabla S_1(x)]^2 - \frac{1}{2} \nabla^2 S_1(x) = 0$$

$$2[\nabla S_0(x)] \cdot [\nabla S_2(x)] + [\nabla S_1(x)]^2 - \nabla^2 S_1(x) = 0 \quad (63)$$

Considerando el caso unidimensional, el conjunto de ecuaciones (61), (62) y (63) se pueden escribir de la siguiente manera

$$\left\{ \frac{dS_0(x)}{dx} \right\}^2 = p^2(x) \quad (64)$$

$$\left\{ \frac{dS_0(x)}{dx} \right\} \left\{ \frac{dS_1(x)}{dx} \right\} = \frac{1}{2} \frac{d^2 S_0(x)}{dx^2}$$

$$\frac{dS_1(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\left\{ \frac{d^2 S_0(x)}{dx^2} \right\}}{\left\{ \frac{dS_0(x)}{dx} \right\}} \quad (65)$$

$$2 \left\{ \frac{dS_0(x)}{dx} \right\} \left\{ \frac{dS_2(x)}{dx} \right\} + \left\{ \frac{dS_1(x)}{dx} \right\}^2 - \frac{d^2 S_1(x)}{dx^2} = 0$$

$$\left\{ \frac{dS_2(x)}{dx} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d^2 S_1(x)}{dx^2} - \left\{ \frac{dS_1(x)}{dx} \right\}^2}{\frac{dS_0(x)}{dx}} \quad (66)$$

Las aproximaciones posteriores $S_1(x), S_2(x), \dots$ son obtenidas de la aproximación de orden cero, donde

$$\frac{dS_0(x)}{dx} = \pm p(x) = \pm \sqrt{2m[E - U(x)]} \quad (67)$$

$$\frac{dS_1(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d \left\{ \frac{dS_0(x)}{dx} \right\}}{\left\{ \frac{dS_0(x)}{dx} \right\}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \left[\frac{dS_0(x)}{dx} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln p(x) \quad (68)$$

⋮

Al integrar, tenemos

$$S_0(x) = \int^x dS_0(x) = \pm \int^x \sqrt{2m[E - U(x)]} dx = \pm \int^x p(x) dx \quad (69)$$

$$S_1(x) = \int^x dS_1(x) = \frac{1}{2} \int^x \frac{d}{dx} \ln p(x) dx = \frac{1}{2} \ln p(x) \quad (70)$$

Resumiendo, y aplicando propiedades de logaritmos

$$S_0(x) = \pm \int^x p(x) dx \quad (71)$$

$$S_1(x) = \ln \sqrt{p(x)} = -\ln \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \quad (72)$$

Por lo tanto, hasta términos lineales en \hbar , la función de onda es

$$\psi = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(x)\right\} = \exp\left\{\left(\frac{i}{\hbar}\right)[S_0(x) + (i\hbar)S_1(x)]\right\}$$

$$\psi = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_0(x) - S_1(x)\right\} \quad (73)$$

Reemplazando (71) y (72) en (73) y usando propiedad de logaritmo natural

$$\psi = \exp\left\{\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx + \ln \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\right\} = \exp\left[\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx\right] \cdot \exp\left[\ln \frac{1}{\sqrt{p(x)}}\right]$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[\pm \frac{i}{\hbar} \int^x p(x) dx\right] \quad (74)$$

Por tanto, a este orden, la solución más general es

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx\right] + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x p dx\right] \quad (75)$$

Donde hemos identificado, para $E > U(x)$

$$p(x) = \sqrt{2m[E - U(x)]} \quad (76)$$

Para el caso donde $E < U(x)$. Podemos definir

$$|p(x)| = \sqrt{2m[U(x) - E]} \quad (77)$$

Y entonces la solución general es

$$\psi(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p| dx \right] + \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x |p| dx \right] \quad (78)$$

Utilizando las ecuaciones (75) y (78) planteamos nuestras funciones de onda para las tres regiones de nuestra barrera de potencial alfa, ver *Figura 4*

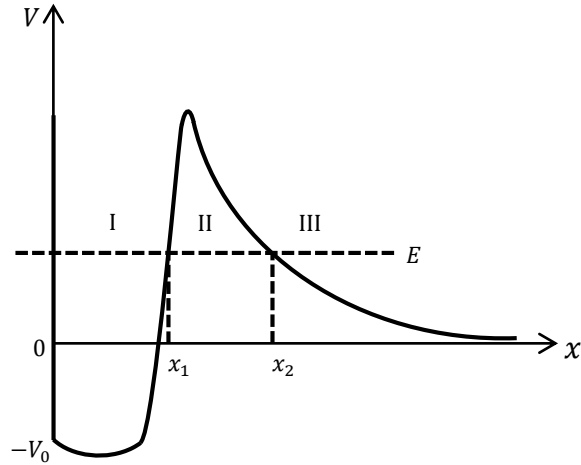


Figura 4. Energía potencial de una partícula alfa en la proximidad de un núcleo pesado inestable.

La onda transmitida en la región III, tiene un solo componente del momento, por lo que dentro de la aproximación WKB, podemos escribir

$$\psi_{III}(x) = \frac{E}{\sqrt{p}} \exp i \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad , x > x_2 \quad (79)$$

$$\psi_{III}(x) = \frac{E}{\sqrt{p}} \left[\cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (80)$$

Con el fin de empalmar las dos regiones, $E > V$ y $E < V$, analicemos el comportamiento en la vecindad $x = x_1$, ver *Figura 5*

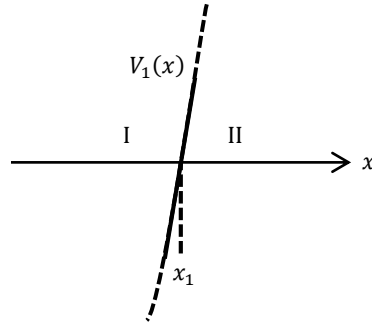


Figura 5. Potencial lineal aproximado $V_1(x)$, válido en la vecindad de los puntos de inflexión x_1

La solución en la región I (región clásicamente accesible) tiene la forma

$$\psi_I = \frac{A}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) + \frac{B}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right), \quad x < x_1 \quad (81)$$

En la región II , la onda transmitida tiene solo un componente de momento, de modo que dentro de la aproximación WKB, podemos escribir

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x)| dx\right), \quad x > x_1 \quad (82)$$

Escribiendo la ecuación de Schrödinger en la forma

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0 \quad (83)$$

Donde

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \quad (84)$$

Considerando la ecuación (83) en una región pequeña a la vecindad de x_1 , podemos expandir la energía potencial en esa región en una serie de potencias

$$V(x) = V(x_1) + \frac{\partial V(x_1)}{\partial x} (x - x_1) + \dots \quad (85)$$

De la *Figura 9*, podemos escribir

$$V(x_1) = E \quad , \quad F_{x_1} = \frac{\partial V(x_1)}{\partial x} \quad (86)$$

Por tanto, reemplazando (86) en (85) tenemos

$$V_1(x) \approx E + F_{x_1}(x - x_1) \quad (87)$$

Reescribiendo nuestra ecuación para vecindades próximas a x_1

$$\frac{d^2\psi(x > x_1)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E - F_{x_1}(x - x_1)]\psi(x > x_1) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} F_{x_1}(x - x_1) \right] \psi(x > x_1) = 0 \quad (88)$$

$$\varphi(z) = \psi(x > x_1) \quad (89)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2} F_{x_1}(x - x_1) \right] \varphi(z) = 0 \quad (90)$$

Haciendo

$$\alpha = \left(\frac{2mF_{x_1}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (91)$$

Podemos representar la ecuación (90) como

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \alpha^3(x - x_1) \right] \varphi(z) = 0 \quad (92)$$

Donde α puede ser absorbido por la variable independiente mediante la definición

$$z = \alpha(x - x_1) \quad (93)$$

Utilizando la regla de la cadena, podemos escribir la segunda derivada respecto a x como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} &= \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = \alpha \frac{d}{dz} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{d}{dz} \right) = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} \left(\alpha \frac{d}{dz} \right) = \alpha^2 \frac{d^2}{dz^2} \end{aligned} \quad (94)$$

Reemplazando (94) en (92) llegamos a la ecuación diferencial de Airy

$$\begin{aligned} \left[\alpha^2 \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^3(x - x_1) \right] \varphi(z) &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{dz^2} - \alpha(x - x_1) \right] \varphi(z) &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{dz^2} - z \right] \varphi(z) &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - z \right] \begin{Bmatrix} Ai(z) \\ Bi(z) \end{Bmatrix} = 0$$

Donde la solución puede ser escrita como una combinación lineal de las funciones de Airy

$$\varphi(z) = aA_i(z) + bB_i(z) \quad (96)$$

Estas funciones tienen expansiones asintóticas en los límites de $z \gg 0$ ($x \gg x_1$), ver anexo C.

$$A_i(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \quad (97)$$

$$B_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (98)$$

Y para $z \ll 0$ ($x \ll x_1$)

$$A_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z)^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (99)$$

$$B_i(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-z)^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3} (-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (100)$$

En la región clásicamente accesible I ($x \ll x_1$), la solución puede ser escrita en términos de número de onda como

$$\psi_I = \frac{A}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(i \int_x^{x_1} k(x) dx\right) + \frac{B}{\sqrt{k(x)}} \exp\left(-i \int_x^{x_1} k(x) dx\right), \quad x < x_1 \quad (101)$$

Donde
$$k(x) = \frac{p(x)}{\hbar} \quad (102)$$

En la vecindad de x_1 de (87), obtenemos

$$p^2 = 2m(E - V_1) \simeq -2mF_{x_1}(x - x_1) \quad (103)$$

Y de las ecuaciones (91) y (93)

$$(x - x_1) = \frac{z}{(2mF_{x_1})^{1/3}} \hbar^{2/3} \quad (104)$$

Por tanto, reemplazando (104) en (103)

$$p^2 = -2mF_{x_1} \frac{z}{(2mF_{x_1})^{1/3}} \hbar^{2/3} = -(2mF_{x_2} \hbar)^{2/3} z \quad (105)$$

$$-2mF_{x_1} dx = -(2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} dz$$

$$dx = (2mF_{x_1})^{-1/3} \hbar^{2/3} dz \quad (106)$$

Por otra parte, a la izquierda de x_1

$$p^2 = \hbar^2 k^2 \quad (107)$$

Igualando las ecuaciones (105) y (107)

$$\hbar^2 k^2 = -(2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} z$$

$$\hbar k = (2mF_{x_1} \hbar)^{1/3} iz^{1/2}$$

$$k = (2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} iz^{1/2} \quad (108)$$

Podemos escribir la integral como

$$\int_x^{x_1} k dx = \int_0^z [(2mF_{x_2})^{1/3} \hbar^{-2/3} iz^{1/2}] [(2mF_{x_1})^{-1/3} \hbar^{2/3} dz]$$

$$\int_x^{x_1} k dx = \int_0^z iz^{1/2} dz = \frac{2}{3} iz^{3/2} = \frac{2}{3} (-z)^{3/2} \quad (109)$$

De la ecuación (108) podemos reescribir k como

$$k = \left(\frac{2mF_{x_1}}{\hbar^2} \right)^{1/3} iz^{1/2} = i\alpha z^{1/2} = i\alpha [\alpha(x - x_1)]^{1/2} = i\alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2}$$

$$k = i\alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2} \quad (110)$$

Por tanto, reemplazando las ecuaciones (110) y (109) en la ecuación (101) nuestra función de onda puede escribirse como

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= \frac{A}{\sqrt{i\alpha^{3/2}(x-x_1)^{1/2}}} \exp\left[\frac{2i}{3}(-z)^{3/2}\right] + \frac{B}{\sqrt{i\alpha^{3/2}(x-x_1)^{1/2}}} \exp\left[-\frac{2i}{3}(-z)^{3/2}\right] \\ \psi_I(x) &= \frac{A}{[-\alpha^3(x-x_1)]^{1/4}} \exp\left(\frac{2i}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2}\right) \\ &\quad + \frac{B}{[-\alpha^3(x-x_1)]^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2}\right) \\ \psi_I(x) &= \frac{1}{[-\alpha^3(x-x_1)]^{1/4}} \{A \exp\left(\frac{2i}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2}\right) \\ &\quad + B \exp\left(-\frac{2i}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2}\right)\} \quad (111)\end{aligned}$$

Por otra parte, reemplazando (99) y (100) en la ecuación (96) la solución asintótica es expresada como

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} [-\alpha(x-x_1)]^{-1/4} \sin\left[\frac{2}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \\ &\quad + \frac{b}{\sqrt{\pi}} [-\alpha(x-x_1)]^{-1/4} \cos\left[\frac{2}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (112)\end{aligned}$$

Para $b = 0$

$$\varphi(z) \cong \frac{a}{\sqrt{\pi}[-\alpha(x-x_1)]^{1/4}} \sin\left[\frac{2}{3}[-\alpha(x-x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right] \quad (113)$$

Utilizando la fórmula de Euler y dando forma

$$\sin \left[\frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2i} \left[\exp \left(\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} - \frac{i\pi}{4} \right) \right]$$

$$\sin \left[\frac{2}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2i} \left[\exp \left(\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right) \right]$$

Tenemos

$$\varphi(z) \cong \frac{a}{\sqrt{\pi}[-\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \frac{1}{2i} \left[\exp \left(\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \right. \\ \left. - \exp \left(-\frac{2i}{3} [-\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right) \right] \quad (114)$$

Estableciendo comparaciones entre la ecuación (111) y (114), podemos escribir

$$\frac{A}{\alpha^{3/4}[-(x - x_1)]^{1/4}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}[-(x - x_1)]^{1/4}} \frac{1}{2i} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right)$$

$$\frac{A}{\alpha^{3/4}} = \frac{a}{2i\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right)$$

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}} = \frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \quad (115)$$

$$\frac{B}{\alpha^{3/4}} = -\frac{a}{2i\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}} \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right)$$

$$\frac{B}{\sqrt{\alpha}} = -\frac{a}{2i\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right) \quad (116)$$

En la región clásicamente prohibida II ($x \gg x_1$), la solución se puede escribir de la forma

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{|k(x)|}} \exp\left(-\int_{x_1}^x |k(x)| dx\right) \quad (117)$$

A la derecha de x_1

$$p^2 = -\hbar^2 k^2 \quad (118)$$

Igualando las ecuaciones (105) y (118) podemos escribir

$$\hbar^2 k^2 = (2mF_{x_1} \hbar)^{2/3} z$$

$$\hbar k = (2mF_{x_1} \hbar)^{1/3} z^{1/2}$$

$$k = (2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} z^{1/2}$$

$$|k| = (2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} z^{1/2} \quad (119)$$

Por tanto, el desarrollo de la integral de la ecuación (117) es

$$\int_{x_1}^x |k| dx = \int_0^z [(2mF_{x_1})^{1/3} \hbar^{-2/3} z^{1/2}] [(2mF_{x_1})^{-1/3} \hbar^{2/3} dz]$$

$$\int_{x_1}^x |k| dx = \int_0^z z^{1/2} dz = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} (z)^{3/2} \quad (120)$$

Reemplazando la ecuación (93) en (119), podemos expresar $|k|$ como

$$|k| = \left(\frac{2mF_{x_1}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{3}} z^{1/2} = \alpha z^{1/2} = \alpha [\alpha(x - x_1)]^{1/2} = \alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2}$$

$$|k| = \alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2} \quad (121)$$

Por tanto podemos expresar nuestra función de onda como

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{\alpha^{3/2} (x - x_1)^{1/2}}} \exp \left[-\frac{2}{3} (z)^{3/2} \right]$$

$$\psi_{II} = \frac{D}{\alpha^{3/4} (x - x_1)^{1/4}} \exp \left(-\frac{2}{3} [\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \quad (122)$$

En los puntos de inflexión

$$\varphi(z) = \frac{a}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp \left(-\frac{2}{3} z^{3/2} \right) + \frac{b}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp \left(\frac{2}{3} z^{3/2} \right) \quad (123)$$

Reemplazando la ecuación (93) en (123)

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{a}{2\sqrt{\pi} [\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \exp \left(-\frac{2}{3} [\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \\ &+ \frac{b}{\sqrt{\pi} [\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \exp \left(\frac{2}{3} [\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \end{aligned} \quad (124)$$

Para $b = 0$

$$\varphi(z) \cong \frac{a}{2\sqrt{\pi} [\alpha(x - x_1)]^{1/4}} \exp \left(-\frac{2}{3} [\alpha(x - x_1)]^{3/2} \right) \quad (125)$$

Al igual que en el caso anterior, en el punto de inflexión, las ecuaciones (123) y (125) deben ser iguales. Esto se garantizará si

$$\frac{D}{\alpha^{3/4}(x-x_1)^{1/4}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}[(x-x_1)]^{1/4}}$$

$$\frac{D}{\alpha^{3/4}} = \frac{a}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}}$$

$$a = \frac{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}}{\alpha^{3/4}} D = \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} D \quad (126)$$

Por tanto, de (115), (116) y (126) tenemos

$$A = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) a = \left[\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) \right] \left[\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} D \right]$$

$$A = \frac{1}{i} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) D = -i \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) D \quad (127)$$

$$B = -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) a = \left[-\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \right] \left[\sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}} D \right]$$

$$B = -\frac{1}{i} \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) D = i \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) D \quad (128)$$

Reemplazando las ecuaciones (127) y (128) en la ecuación (81)

$$\psi_I = \frac{-i}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) D + \frac{i}{\sqrt{p(x)}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx\right) \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) D$$

$$\psi_I = \frac{-iD}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{iD}{\sqrt{p(x)}} \exp\left[-i\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\psi_I = \frac{D}{\sqrt{p(x)}} \left\{ -i \exp \left[i \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \right] + i \exp \left[-i \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}$$

$$\psi_I = \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \left\{ \frac{\exp \left[i \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \right] - \exp \left[-i \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \right]}{2i} \right\}$$

$$\psi_I = \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) \quad (129)$$

Utilizando propiedades trigonométricas

$$\sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx \right) \cos \frac{\pi}{4} + \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx \right) \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx \right) = \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right)$$

En la ecuación (129) para $x < x_1$

$$\psi_I = \frac{2D}{\sqrt{p(x)}} \cos \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right) \quad (130)$$

Mostrando la ecuación (82), para $x > x_1$

$$\psi_{II} = \frac{D}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x)| dx \right)$$

Por tanto, a la derecha del punto de inflexión, $x = x_1$, la solución exponencial decreciente se conectará a la solución oscilatoria según

$$\frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx \right] \quad (131)$$

Mientras que la solución exponencial creciente conectará a una oscilatoria de acuerdo a

$$\frac{1}{\sqrt{p(x)}} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right] \leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx \right] \quad (132)$$

Haciendo un análisis similar para x_2 , tenemos

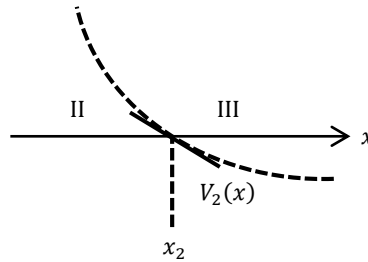


Figura 6. Potencial lineal aproximado $V_2(x)$, válido en la vecindad de los puntos de inflexión x_2

A la izquierda del punto de inflexión, $x = x_2$, la solución exponencial creciente conecta en una solución oscilatoria según

$$\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{p(x)}} \cos \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (133)$$

Mientras que una solución exponencial decreciente conecta a una solución oscilatoria según

$$-\frac{1}{\sqrt{|p(x)|}} \exp \left[-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx \right] \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x p dx - \frac{\pi}{4} \right] \quad (134)$$

Reemplazando las ecuaciones (133) y (134) en (80) podemos reescribir nuestra función $\psi_{III}(x)$, como

$$\psi_{III}(x) = \frac{E}{2\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx\right) - \frac{iE}{\sqrt{|p(x)|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_2}^x |p| dx\right) \quad (135)$$

Factorizando y utilizando propiedad de la integral definida

$$\psi_{II}(x) = \frac{E}{\sqrt{|p(x)|}} \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p| dx\right) - i \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_2} |p| dx\right) \right]$$

$$\int_{x_1}^{x_2} |p| dx = \int_{x_1}^x |p| dx + \int_x^{x_2} |p| dx \Rightarrow \int_x^{x_2} |p| dx = \int_{x_1}^{x_2} |p| dx - \int_{x_1}^x |p| dx$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) = \frac{E}{\sqrt{|p(x)|}} & \left[\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx + \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right. \\ & \left. - i \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx - \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right] \end{aligned} \quad (136)$$

$$L = \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx \quad (137)$$

Haciendo el cambio de variable L y reemplazando en nuestra función de onda $\psi_{II}(x)$, tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) = \frac{E}{\sqrt{|p(x)|}} & \left[\frac{1}{2} \exp(-L) \cdot \exp\left(\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right. \\ & \left. - i \exp(L) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p| dx\right) \right] \end{aligned} \quad (138)$$

Por otra parte, al igual que el caso anterior. Reemplazando (131) y (132) en (138), tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{II}(x) = & \frac{-E}{2\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \cdot \text{sen} \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right) \\ & - \frac{2iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \cdot \text{cos} \left(\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (139)$$

$$Z = \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} \quad (140)$$

Reemplazando el cambio de variable, Z , en nuestra función de onda $\psi_{II}(x)$

$$\psi_{II}(x) = \frac{-E}{2\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \text{sen}(Z) - \frac{2iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \cdot \text{cos}(Z) \quad (141)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \psi_I(x) = & \frac{-E}{2\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \left\{ \frac{\exp(iZ) - \exp(-iZ)}{2i} \right\} \\ & - \frac{2iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \left\{ \frac{\exp(iZ) + \exp(-iZ)}{2} \right\} \end{aligned} \quad (142)$$

Finalmente, multiplicando, ordenando y factorizando

$$\begin{aligned} \psi_I(x) = & \frac{iE}{4\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \cdot \exp(iZ) - \frac{iE}{4\sqrt{p(x)}} \exp(-L) \cdot \exp(-iZ) \\ & - \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \cdot \exp(iZ) - \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \exp(L) \cdot \exp(-iZ) \end{aligned} \quad (143)$$

Podemos expresar nuestra función de onda en la región I, como

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left[\frac{1}{4\exp(L)} - \exp(L) \right] \exp(iZ) \\ &\quad - \frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left[\frac{1}{4\exp(L)} + \exp(L) \right] \exp(-iZ)\end{aligned}\quad (144)$$

Desarrollando la integral Z , podemos expresar la función de onda incidente, $\psi_{inc}(x)$, como

$$\begin{aligned}k = \frac{p(x)}{\hbar} = cte \quad \Rightarrow \quad Z &= \frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} p dx - \frac{\pi}{4} = -k(x - x_1) - \frac{\pi}{4} \\ \psi_{inc}(x) &= -\frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left(\frac{1}{4\exp(L)} + \exp(L) \right) \exp(-iZ)\end{aligned}\quad (145)$$

Por tanto, la probabilidad de transmisión de la partícula alfa, es aproximadamente

$$\begin{aligned}T = \left| \frac{\psi_{inc}}{\psi_{ref}} \right|^2 &= \left| \frac{\frac{iE}{\sqrt{p(x)}}}{-\frac{iE}{\sqrt{p(x)}} \left(\frac{1}{4\exp(L)} + \exp(L) \right)} \right|^2 = \frac{1}{\left(\exp(L) + \frac{1}{4\exp(L)} \right)^2} \\ T &= \frac{1}{\exp(2L) + \frac{1}{2} + \frac{1}{16\exp(2L)}}\end{aligned}\quad (146)$$

Haciendo la aproximación: $\exp(-2L) \ll 1$, tenemos

$$\begin{aligned}T = \exp(-2L) &= \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p| dx\right) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[V - E]} dx\right) \\ T &= \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[V - E]} dx\right)\end{aligned}\quad (147)$$

Supongamos que una partícula alfa se mueve en el interior del pozo potencial con cierta velocidad, v_0 , por lo tanto, golpea la pared $\frac{v_0}{2R_0}$ veces por segundo, de acuerdo a la *figura 7*.

La multiplicación de esta frecuencia con la probabilidad de escape, T , nos da la constante de decaimiento λ .

$$\lambda = \frac{v_0}{2R_0} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[V - E]} dx\right) \quad (148)$$

De acuerdo a la *figura 7*, el radio del núcleo R_0 correspondería a x_1 , x_2 a r_i y V al potencial coulombiano

$$\lambda = \frac{v_0}{2R_0} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{R_0}^{r_i} \sqrt{2m[V - E]} dx\right) \quad (149)$$

Tomando logaritmo natural, y aplicando propiedades de este, tenemos

$$\ln \lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{R_0}^{r_i} \sqrt{(V - E)} dr \quad (150)$$

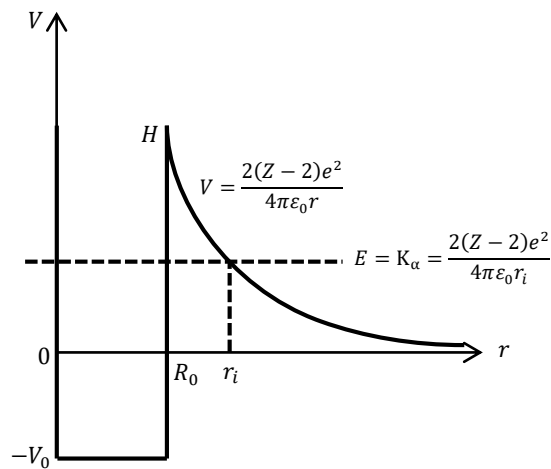


Figura 7. Desintegración alfa desde el punto de vista de la mecánica cuántica.

En $r = r_i$, la energía potencial de la partícula alfa es igual al potencial coulombiano. A una distancia $r = \infty$, la energía potencial V_i equivale a la energía cinética alfa K_α

$$V_i = K_\alpha = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \quad (151)$$

Reemplazando (151) en (150) y desarrollando

$$\begin{aligned} \ln\lambda &= \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \int_{R_0}^{r_i} \left[\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r_i} \right]^{\frac{1}{2}} dr \\ \ln\lambda &= \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} \left[\frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{R_0}^{r_i} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} \right]^{\frac{1}{2}} dr \\ \ln\lambda &= \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} r_i^{\frac{1}{2}} \int_{R_0}^{r_i} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} \right]^{\frac{1}{2}} dr \\ \ln\lambda &= \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} \int_{R_0}^{r_i} \left[\frac{r_i}{r} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} dr \end{aligned} \quad (152)$$

La integral puede determinarse simplemente por medio de la sustitución

$$r = r_i \cos^2 \xi \quad \text{y} \quad R_0 = r_i \sin^2 \xi_0$$

Desarrollando

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} \int_{\xi_0}^0 \left[\frac{1}{\cos^2 \xi} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} (-2r_i \cos \xi \sin \xi d\xi)$$

$$\begin{aligned}
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + \frac{4\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \int_{\xi_0}^0 \left[\frac{1}{\cos^2 \xi} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \cos \xi \sin \xi d\xi \\
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + \frac{4\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \int_{\xi_0}^0 \tan \xi \cos \xi \sin \xi d\xi \\
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + \frac{4\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \int_{\xi_0}^0 \sin^2 \xi d\xi \\
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \int_{\xi_0}^0 1 - \cos 2\xi d\xi \\
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \left[\xi - \frac{1}{2} \sin 2\xi \right]_{\xi_0}^0 \\
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) - \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i [\xi_0 - \sin \xi_0 \cos \xi_0] \\
\ln \lambda &= \ln \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) - \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \left[\cos^{-1} \left(\frac{R_0}{r_i} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{R_0}{r_i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R_0}{r_i} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (153)
\end{aligned}$$

Puesto que la barrera de potencial es relativamente ancha, $R_0 < r_i$. Usando las aproximaciones

$$\cos^{-1} \left(\frac{R_0}{r_i} \right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{\pi}{2} - \left(\frac{R_0}{r_i} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (154)$$

$$\left(1 - \frac{R_0}{r_i} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 \quad (155)$$

Nuestra ecuación (153), resulta

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} r_i \left[\frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{R_0}{r_i}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (156)$$

De la ecuación (151) podemos escribir y sustituir r_i por

$$r_i = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 K_\alpha}$$

Por tanto, tenemos

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{\sqrt{2mK_\alpha}}{2\hbar} \frac{(Z-2)e^2}{\varepsilon_0 K_\alpha} + \frac{2\sqrt{2mK_\alpha}}{\hbar} \frac{(Z-2)e^2}{\pi\varepsilon_0 K_\alpha} \left[\frac{2\pi\varepsilon_0 K_\alpha R_0}{(Z-2)e^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) - \frac{\sqrt{2mK_\alpha}}{2\hbar} \frac{(Z-2)e^2}{\varepsilon_0 K_\alpha} + \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} \frac{(Z-2)^{\frac{1}{2}} e}{(\pi\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}}} R_0^{\frac{1}{2}}$$

Tenemos

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) + \frac{4e}{\hbar} \left(\frac{m}{\pi\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} (Z-2)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}} - \frac{e^2}{\varepsilon_0 \hbar} \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (Z-2) K_\alpha^{-\frac{1}{2}} \quad (157)$$

El resultado de calcular las diversas constantes de esta última ecuación es

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) + 2,97(Z-2)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}} - 3,95(Z-2) K_\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ln\lambda = \ln\left(\frac{v_0}{2R_0}\right) + 2,97(Z_D)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}} - 3,95(Z_D) K_\alpha^{-\frac{1}{2}} \quad (158)$$

Para comparar la teoría con las observaciones más fácilmente, expresemos en términos de logaritmos comunes, observamos que

$$\ln A = \frac{\log_{10} A}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} A}{0,4343}$$

Y así

$$\log \lambda = \log \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + 0,433 \left[2,97(Z_D)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}} - 3,95(Z_D) K_\alpha^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\log \lambda = \log \left(\frac{v_0}{2R_0} \right) + 1,29(Z_D)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}} - 1,72 K_\alpha^{-\frac{1}{2}} (Z_D) \quad (159)$$

Donde, $v_0/2R_0$ es el número de veces por segundo que una partícula alfa, dentro de un núcleo, golpea la barrera potencial que lo rodea, Z_D : es el número atómico del núcleo residual, R_0 : Radio del núcleo hija, fm y K_α : Energía cinética de la partícula alfa, MeV.

Contrastando el modelo deducido para el decaimiento alfa, ecuación (159), con la técnica regresión lineal para los isótopos del polonio, tenemos

$$\log \lambda = -1,4874 Z_D K_\alpha^{-1/2} + 46,774$$

Por tanto, las frecuencias de impacto serán determinadas mediante la expresión

$$\log(f) + 1,29(Z_D)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}} = 46,774$$

$$\log(f) = 46,774 - 1,29(82)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}}$$

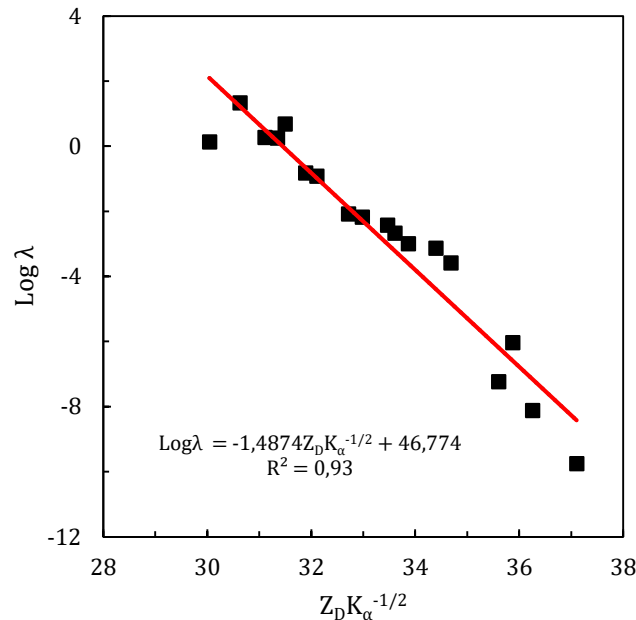
$$f = 10^{46,774 - 1,29(82)^{\frac{1}{2}} R_0^{\frac{1}{2}}}$$

Por tanto, los resultados para los isótopos radiactivos alfa del polonio son

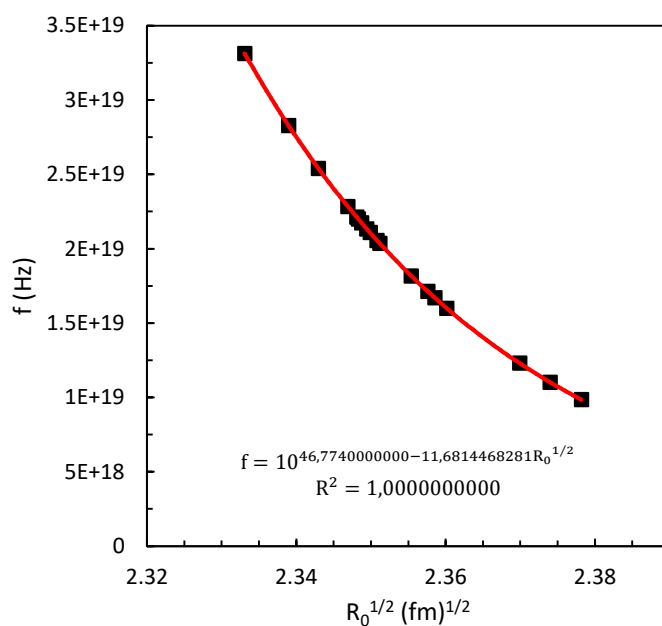
Tabla 10. Frecuencias de impacto para los isótopos radiactivos alfa del polonio.

Núcleo	R_0 [fm]	$t_{1/2}$ [s]	λ [s ⁻¹]	$\log \lambda$	$Z_D K_\alpha^{-1/2}$ [MeV]	f_{impact} [Hz]
¹⁹² ₈₄ Po ₁₀₈	5,5220178	3,22E-02	2,152630996E+01	1,332969589	30,62997621	2,10765E+19
¹⁹³ ₈₄ Po ₁₀₉	5,443377402	3,70E-01	1,873370758E+00	0,272623737	31,11199483	3,31102E+19
¹⁹⁴ ₈₄ Po ₁₁₀	5,5167178	3,92E-01	1,768232603E+00	0,247539394	31,34699229	2,17258E+19
¹⁹⁵ ₈₄ Po ₁₁₁	5,470853749	4,64E+00	1,493851682E-01	-0,82569252	31,8911667	2,8266E+19
¹⁹⁶ ₈₄ Po ₁₁₂	5,5136178	5,80E+00	1,195081346E-01	-0,922602533	32,10874977	2,21149E+19
¹⁹⁷ ₈₄ Po ₁₁₃	5,48949394	8,40E+01	8,251752150E-03	-2,083453825	32,71835461	2,53955E+19
¹⁹⁸ ₈₄ Po ₁₁₄	5,5146178	1,06E+02	6,539124345E-03	-2,184480404	32,9798297	2,19886E+19
¹⁹⁹ ₈₄ Po ₁₁₅	5,508008394	3,28E+02	2,113253599E-03	-2,675048383	33,61097951	2,28371E+19
²⁰⁰ ₈₄ Po ₁₁₆	5,5199178	6,91E+02	1,003107352E-03	-2,998652586	33,86900132	2,13314E+19
²⁰¹ ₈₄ Po ₁₁₇	5,526399209	9,36E+02	7,405418596E-04	-3,130450388	34,3960772	2,05547E+19
²⁰² ₈₄ Po ₁₁₈	5,5281177	2,68E+03	2,586370077E-04	-3,587309333	34,68828738	2,03536E+19
²⁰⁶ ₈₄ Po ₁₂₂	5,5480177	7,60E+05	9,120357639E-07	-6,039988131	35,87862083	1,81657E+19
²⁰⁸ ₈₄ Po ₁₂₄	5,5584176	9,15E+07	7,575379023E-09	-8,120595633	36,25717846	1,71188E+19
²⁰⁹ ₈₄ Po ₁₂₅	5,5628176	3,95E+09	1,754802989E-10	-9,755771635	37,10497422	1,66946E+19
²¹⁰ ₈₄ Po ₁₂₆	5,5704176	1,20E+07	5,776226505E-08	-7,238355785	35,60381676	1,59868E+19
²¹¹ ₈₄ Po ₁₂₇	5,616568411	5,16E-01	1,343308489E+00	0,128175759	30,04165808	1,22967E+19
²¹⁶ ₈₄ Po ₁₃₂	5,6359174	1,45E-01	4,780325383E+00	0,679457459	31,4957804	1,1019E+19
²¹⁸ ₈₄ Po ₁₃₄	5,6558173	1,86E+02	3,726597745E-03	-2,428687483	33,46960774	9,84526E+18

Fuente: Tabla elaborada por el autor.



Grafica 1. Logaritmo decimal de la constante de decaimiento vs producto del número atómico del núcleo hija y energía cinética para los isótopos radiactivos alfa del polonio.



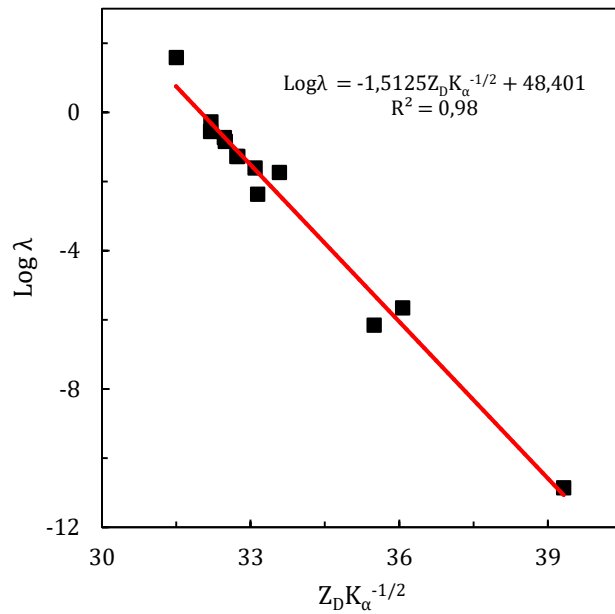
Gráfica 2. Frecuencias de impacto vs los radios atómicos de los isótopos radiactivos alfa del polonio.

Para los restantes nucleídos radioactivos alfa seleccionaos, se procede de manera similar obteniéndose los siguientes resultados mostrados en las *tablas* 11, 12 y 13.

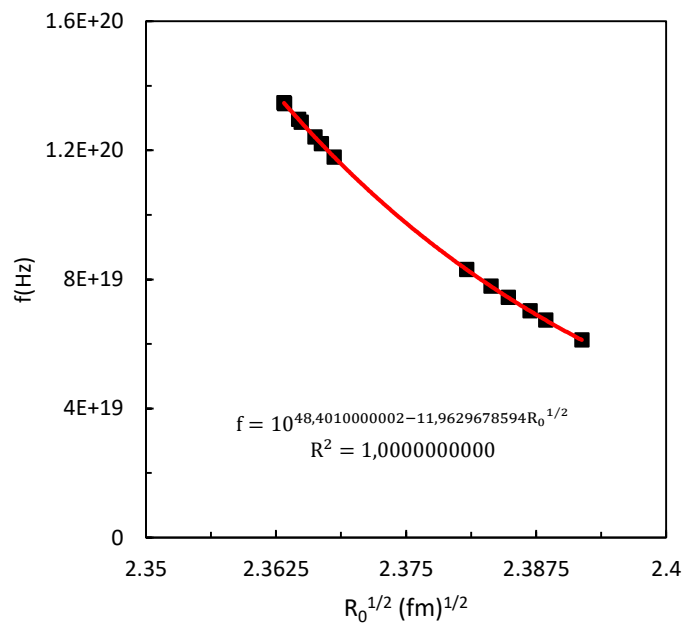
Tabla 11. Frecuencias de impacto para los isótopos radiactivos alfa del radio.

Núclido	R_0 [fm]	$t_{1/2}$ [s]	λ [s ⁻¹]	$\log \lambda$	$Z_D K_\alpha^{-1/2}$ [MeV]	f_{impact} [Hz]
²⁰⁸ ₈₈ Ra ₁₂₀	5,5850183	1,30E+00	5,33190139E-01	-0,273117891	32,20026825	1,34693E+20
²⁰⁹ ₈₈ Ra ₁₂₁	5,5853182	4,80E+00	1,44405663E-01	-0,840415776	32,49048675	1,34458E+20
²¹⁰ ₈₈ Ra ₁₂₂	5,591718	3,70E+00	1,87337076E-01	-0,727376263	32,47132136	1,29537E+20
²¹¹ ₈₈ Ra ₁₂₃	5,5929179	1,30E+01	5,33190139E-02	-1,273117891	32,72011451	1,28635E+20
²¹² ₈₈ Ra ₁₂₄	5,5991177	1,30E+01	5,33190139E-02	-1,273117891	32,74230272	1,24074E+20
²¹³ ₈₈ Ra ₁₂₅	5,6020177	1,64E+02	4,22650720E-03	-2,374018387	33,14344019	1,21998E+20
²¹⁴ ₈₈ Ra ₁₂₆	5,6079177	2,46E+00	2,81767147E-01	-0,550109646	32,19261754	1,17881E+20
²²⁰ ₈₈ Ra ₁₃₂	5,6683214	1,80E-02	3,85081767E+01	1,585552956	31,49896985	8,30391E+19
²²¹ ₈₈ Ra ₁₃₃	5,6795228	2,80E+01	2,47552564E-02	-1,60633257	33,08724584	7,78314E+19
²²² ₈₈ Ra ₁₃₄	5,6874239	3,80E+01	1,82407153E-02	-1,738958136	33,58142556	7,43585E+19
²²³ ₈₈ Ra ₁₃₅	5,6973253	9,88E+05	7,01565972E-07	-6,153931484	35,49091546	7,02276E+19
²²⁴ ₈₈ Ra ₁₃₆	5,7046263	3,16E+05	2,19350374E-06	-5,658861622	36,06759947	6,73314E+19
²²⁶ ₈₈ Ra ₁₃₈	5,7211288	5,05E+10	1,37256867E-11	-10,86246592	39,31752259	6,12237E+19

Fuente: Tabla elaborada por el autor.



Grafica 3. Logaritmo de la constante de decaimiento vs el producto del número atómico del núcleo hija y energía cinética para los isótopos radiactivos alfa del radio.

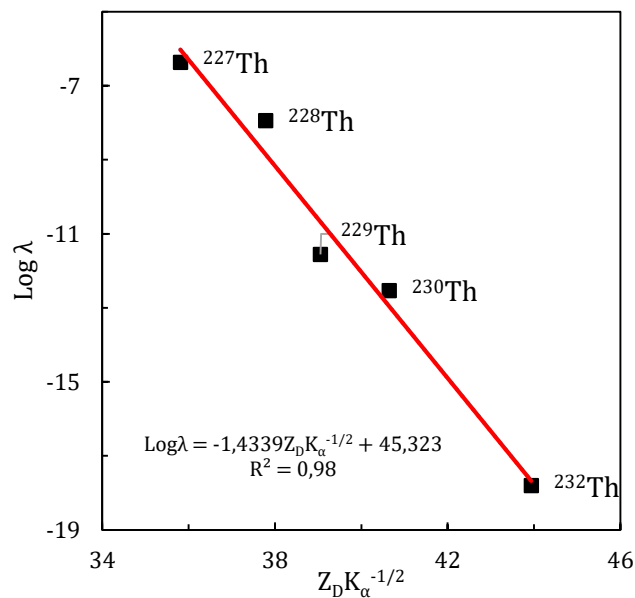


Grafica 4. Frecuencias de impacto vs los radios atómicos de los isótopos radiactivos alfa del radio.

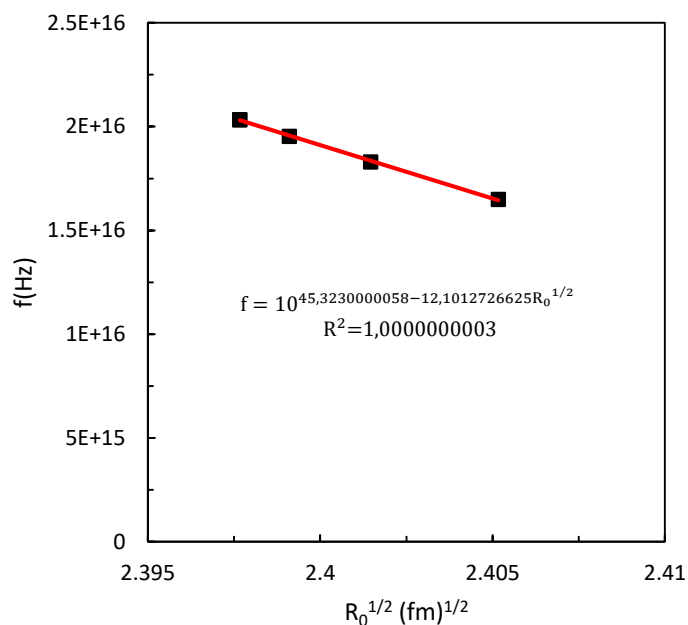
Tabla 12. Frecuencias de impacto para los isótopos radiactivos alfa del torio.

Núcleo	R_0 [fm]	$t_{1/2}$ [s]	λ [s ⁻¹]	$\log \lambda$	$Z_D K_\alpha^{-1/2}$ [MeV]	f_{impact} [Hz]
²²⁷ ₉₀ Th ₁₃₇	5,7488152	1,61E+06	4,305261991E-07	-6,366000415	35,81193856	2,03309E+16
²²⁸ ₉₀ Th ₁₃₈	5,7488152	6,03E+07	1,149497812E-08	-7,939491851	37,78813423	2,03309E+16
²²⁹ ₉₀ Th ₁₃₉	5,7557143	2,49E+11	2,783723617E-12	-11,55537389	39,0542604	1,95323E+16
²³⁰ ₉₀ Th ₁₄₀	5,7670131	2,38E+12	2,912383112E-13	-12,5357515	40,64864477	1,82924E+16
²³² ₉₀ Th ₁₄₂	5,7848124	4,42E+17	1,568206291E-18	-17,80459681	43,9385653	1,6499E+16

Fuente: Tabla elaborada por el autor.



Grafica 5. Logaritmo de la constante de decaimiento vs el producto del número atómico del núcleo hija y energía cinética para los isótopos radiactivos alfa del torio.

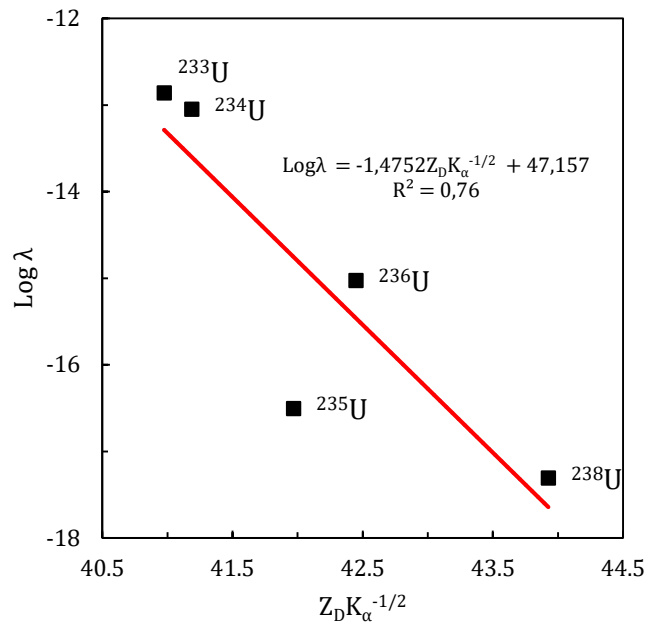


Grafica 6. Frecuencias de impacto vs los radios atómicos de los isótopos radiactivos alfa del torio.

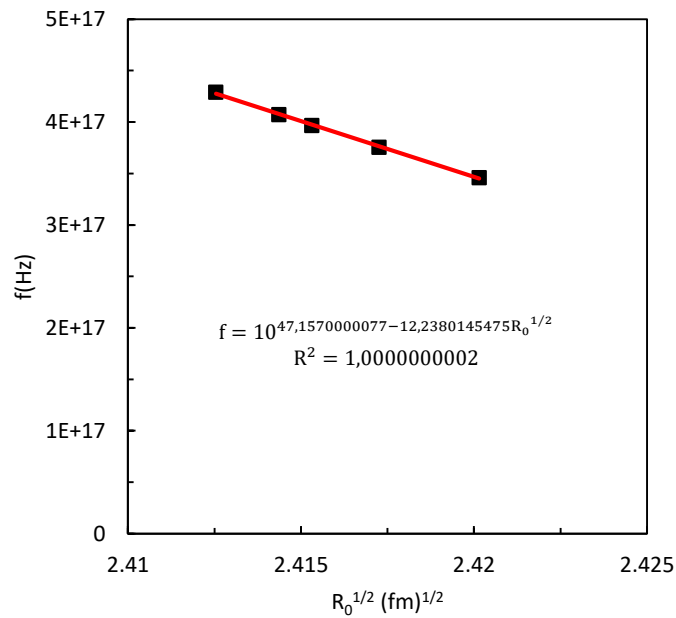
Tabla 13. Frecuencias de impacto para los isótopos radiactivos alfa del uranio.

Núcleo	R_0 [fm]	$t_{1/2}$ [s]	λ [s ⁻¹]	$\log \lambda$	$Z_D K_\alpha^{-1/2}$ [MeV]	f_{impact} [Hz]
²³³ ₉₂ U ₁₄₁	5,820349	5,02E+12	1,380771276E-13	-12,85987826	40,97580868	4,28846E+17
²³⁴ ₉₂ U ₁₄₂	5,829152	7,75E+12	8,943834588E-14	-13,04847624	41,18832096	4,07364E+17
²³⁵ ₉₂ U ₁₄₃	5,833741	2,22E+16	3,122284597E-17	-16,50552751	41,96942526	3,96601E+17
²³⁶ ₉₂ U ₁₄₄	5,843138	7,39E+14	9,379528830E-16	-15,02781898	42,44832171	3,75454E+17
²³⁸ ₉₂ U ₁₄₆	5,857133	1,41E+17	4,915937451E-18	-17,30839365	43,92617434	3,4606E+17

Fuente: Tabla elaborada por el autor.



Grafica 7. Logaritmo de la constante de decaimiento vs el producto del número atómico del núcleo hija y energía cinética para los isótopos radiactivos alfa del uranio.



Grafica 8. Frecuencias de impacto vs los radios atómicos de los isótopos radiactivos alfa del uranio.

Capítulo V: DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Discusión

Si bien es cierto, los autores indicados en los antecedentes del trabajo elaboraron un modelo basado en el uso de barreras de potencial rectangulares y el autor basado en la aproximación semiclásica, arribando a los mismos resultados en cuanto al modelo elaborado; en el trabajo se adiciona la estimación por simulación de la frecuencia de impacto de la partícula alfa.

A todas las gráficas del logaritmo de la constante de decaimiento en función del producto del número atómico del núcleo hija y energía cinética alfa, obtenidos en los cuatro casos, se aplicó un modelo de ajuste de correlación lineal. Los ajustes de los datos son bastante buenos, su coeficiente de regresión lineal es en promedio, sin considerar el U-235, $R^2 = 0.96$, esto indica una incertidumbre de solo 4%. Lo cual prueba que el modelo de ajuste elegido es correcto y responde muy bien a la descripción del fenómeno de desintegración alfa.

En los isótopos del uranio se obtuvo una correlación, $R^2 = 0,76$ debido a que el isótopo uranio 235 se aleja de la tendencia lineal de los otros isótopos, posiblemente por causa de alguna variable característica no considerada en el fenómeno.

Por otro lado, si se comparan estas curvas lineales, con la solución del modelo teórico, ecuación (159), se observa que coinciden con este resultado, lo cual prueba que el modelo mecánico cuántico desarrollado, responde muy bien para describir el fenómeno de la desintegración alfa.

Cuando se grafica el valor de la frecuencia de impacto en función de la raíz del radio del núcleo para cada tipo de átomo, resulta que la frecuencia de impacto varía decrecientemente con los radios nucleares de sus isótopos como se puede

visualizar en las *gráficas 2, 4, 6 y 8*. Este resultado es lógico debido a que, a mayor radio la partícula alfa tiene que recorrer mayor distancia por lo tanto la frecuencia de impacto con su barrera de potencial será menor.

5.2. Conclusiones

- Se ha cumplido con el objetivo del trabajo, estimando las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista, que considera como variables la energía cinética de la radiación alfa y su periodo de semidesintegración.
- La curva elaborada del logaritmo de la constante de decaimiento en función del producto número atómico del núcleo hija y energía cinética alfa siguen un comportamiento lineal, comportamiento que se repite en todos los isótopos radiactivos estudiados.
- La curva obtenida con los datos de la frecuencia de impacto y radios nucleares para los isótopos de cada átomo radiactivo siguen un comportamiento monótono decreciente.
- El modelo mecánico cuántico, desarrollado para el decaimiento radiactivo alfa usando la aproximación semiclásica, concuerda con los trabajos realizados en 1920 por Gamow, Gurney y Condon.
- El análisis mecánico cuántico de la emisión de la partícula alfa, concuerda con los datos experimentales reportados con un coeficiente de regresión promedio de 0,96 para los radioisótopos estudiados sin considerar el U235, dado que este se aparta de la tendencia lineal de los otros isótopos del uranio.

5.3. Recomendaciones

- Se recomienda proseguir con estudios que expliquen la anomalía encontrada con el isótopo U235, en lo que respecta al comportamiento lineal que presentan los otros radioisótopos.
- Se recomienda, seguir desarrollando el modelo mecánico cuántico no relativista de la radiactividad alfa, mediante métodos de simulación digital.

Capítulo VI: FUENTES DE INFORMACIÓN

5.1. Referencias

- Acosta, V., Cowan, C., & Graham, B. (1983). *Curso de física moderna*. México D. F.: HARLA, S.A. de C.V.
- Burcham, W. E., & Jobes, M. (1995). *Nuclear and particle physics*. London, United Kingdom: Pearson Education.
- Child, M. S. (2014). *Semiclassical mechanics with molecular applications* (2 ed.). United Kingdom: Oxford University Press.
- Das, A., & Ferbel, T. (2005). *Introduction to nuclear and particle physics* (2 ed.). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Gamow, G. (1928, August). Zur quantentheorie des atomkerns. *Zeitschrift für Physik*, 51, 204-212.
- Gurney, R., & Condon, E. (1929, February). Quantum mechanics and radioactive disintegration. *Phys. Rev.*, 33 (2), 127-140.
- Griffiths, D. (1995). *Introduction to quantum mechanics*. United States of America: Prentice Hall.
- IAEA. (2015, 09 15). *Nuclear Data Services*. Retrieved from www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html
- Kamal, A. (2014). *Nuclear physics*. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Karnakov, B., & Krainov, V. (1972). *WKB approximation in atomic physics*. Berlin: Springer.

Krane, K. (1987). *Introductory nuclear physics*. Singapore: John Wiley & Sons.

Liboff, R. (1980). *Introductory quantum mechanics*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company.

Malley, M. (2011). *Radioactivity, a history of a mysterious*. United States of America: Oxford University Press, Inc.

Meyerhof, W. E. (1967). *Elements of nuclear physics*. United States of America: McGraw-Hill.

Migdal, A., & Krainov, V. (1969). *Approximation methods in quantum mechanics*. New York: W. A. Benjamin, Inc.

Razavy, M. (2003). *Quantum theory of tunneling*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Segre, E. (1965). *Nuclei and particles*. New York: W.A. Benjamin, Inc.

Semat, H., & Albright, J. (1972). *Introduction to atomic and Nuclear physics* (5 ed.). London: Chapman and Hall.

5.2. Bibliografía

- Beiser, A. (2003). *Concepts of modern physics* (6 ed.). United States: McGraw Hill.
- Galindo, A., & Pascual, P. (1991). *Quantum mechanics II*. Berlin: Springer Verlag.
- Hecht, K. T. (2000). *Quantum mechanics*. United States of America: Springer.
- Jha, D. (2004). *Radioactivity and radioactive decay*. New Delhi: Discovery Publishing House.
- Kaplan, I. (1977). *Nuclear physics* (2 ed.). United States: Addison Wesley Publishing Company.
- Landau, L., & Lifshitz, E. (1992). *Física teórica: teoría de los campos* (2 ed.). Barcelona: Editorial Reverté, S.A.
- Landau, L., & Lifshitz, E. (1994). *Física teórica: mecánica* (2 ed.). Barcelona, España: Editorial Reverté, S.A.
- Levich, B. G. (2003). *Física teórica: mecánica cuántica*. España: Editorial Reverté, S. A.
- Peña, L. (2006). *Introducción a la mecánica cuántica* (3 ed.). México: Fondo de Cultura Económica, Universidad Autónoma de México.
- Sokolov, A. A., Loskutov, Y. M., & Temov, I. V. (1966). *Quantum mechanics*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Thankappan, V. K. (1993). *Quantum mechanics* (2 ed.). New Delhi: New Age International (P) Publishers.

Vallee, O., & Soares, M. (2004). *Airy functions and applications in physics*. London: World Scientific Publishing Company.

Zettili, N. (2001). *Quantum mechanics: concepts and applications*. Great Britain, England: John Wiley & Sons, Ltd.

Zhang, J. (1999). *Theory and application of quantum molecular dynamics*. Singapore: World Scientific Pub Co Inc.

5.3. Fuentes Electrónicas

IAEA. (2015, 09 15). *Nuclear Data Services*. Retrieved from <https://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>

ANEXO

Anexo A

Matriz de consistencia

Titulo	Problemas	Objetivos	Hipótesis	Variables	Dimensiones	Metodología
<p>Estimación de las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial, a través de su energía y periodo de semidesintegración del nucleído radiactivo.</p>	<p>Problema General</p> <p>¿Será posible estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista?</p>	<p>Objetivo General</p> <p>Estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista.</p>	<p>Hipótesis General</p> <p>Es posible estimar las frecuencias de impacto de la partícula alfa con su barrera de potencial a partir de un modelo mecánico cuántico no relativista.</p>	<p>Variables Independientes</p> <p>Modelo mecánico cuántico no relativista</p>	<p>- Energía cinética</p> <p>- Periodo de semidesintegración</p>	<p>Tipo de investigación</p> <p>Es una investigación aplicada, porque se utiliza leyes principios, teorías para construir un modelo cuántico semiempírico que relaciones a las variables de estudio, y que a través de él se usan datos experimentales para procesarlos mediante técnicas de simulación.</p>
	<p>Problema específico</p> <p>¿Será posible estimar las frecuencias de impacto de las partículas alfa con su barrera de potencial, utilizando las datas de energías y períodos de semidesintegración de las partículas alfa reportadas por la IAEA?</p>	<p>Objetivo Específico</p> <p>Estimar las frecuencias de impacto de las partículas alfa con su barrera de potencial utilizando las datas de energías y períodos de semidesintegración de las partículas alfa reportadas por la IAEA.</p>	<p>Hipótesis Específica</p> <p>Es posible estimar las frecuencias de impacto de las partículas alfa con su barrera de potencial utilizando las datas de energías y períodos de semidesintegración de las partículas alfa reportadas por la IAEA.</p>	<p>Variables Dependientes</p> <p>Frecuencia de impacto</p>	<p>- Frecuencia</p>	<p>Enfoque</p> <p>En una primera etapa el trabajo tendrá un enfoque cualitativo lógico, lo que permitirá obtener el modelo mecánico cuántico deseado. En otra parte, el trabajo se realizará mediante procesos de simulación donde se utilizarán datos numéricos resultando un enfoque cuantitativo.</p> <p>Población y muestra</p> <p>Nuestra población comprende a todos aquellos nucleídos emisores alfa reportados en la base de datos de la International Atomic Energy Agency, IAEA.</p> <p>Nuestra muestra comprende solo a aquellos nucleídos con mayor número de isotopos radiactivos alfa. Bajo este criterio resultan los siguientes nucleídos: polonio, radio, torio y uranio.</p>

Anexo B

Hojas de cálculos

Hoja de cálculo de los isótopos radiactivos del polonio.

Simbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	R ₀ [fm]	T _{1/2} [s]	λ [s ⁻¹]	Log(λ)	Q _α [MeV]	K _α [MeV]	Z _D K _α ^{-1/2} [MeV]	f _{impacto} [Hz]
Po	192	84	191,9913359	187,9808748	5,5220178	3,22E-02	2,15263100E+01	1,332969589	7,31955325	7,166950183	30,62997621	2,10765E+19
Po	193	84	192,9910257	188,980807	5,443377402	3,70E-01	1,87337076E+00	0,272623737	7,09372366	6,946595151	31,11199483	3,31102E+19
Po	194	84	193,9881861	189,978082	5,5167178	3,92E-01	1,76823260E+00	0,247539394	6,98700318	6,842833148	31,34699229	2,17258E+19
Po	195	84	194,9881255	190,978276	5,470853749	4,64E+00	1,49385168E-01	-0,82569252	6,7498628	6,611300378	31,8911667	2,8266E+19
Po	196	84	195,9855259	191,975775	5,5136178	5,80E+00	1,19508135E-01	-0,922602533	6,65798241	6,522001787	32,10874977	2,21149E+19
Po	197	84	196,9856595	192,9761732	5,48949394	8,40E+01	8,25175215E-03	-2,083453825	6,41151319	6,28123142	32,71835461	2,53955E+19
Po	198	84	197,9833891	193,9740123	5,5146178	1,06E+02	6,53912434E-03	-2,184480404	6,30959137	6,182026855	32,9798297	2,19886E+19
Po	199	84	198,9836671	194,9745429	5,508008394	3,28E+02	2,11325360E-03	-2,675048383	6,0742219	5,952033494	33,61097951	2,28371E+19
Po	200	84	199,9817988	195,9727742	5,5199178	6,91E+02	1,00310735E-03	-2,998652586	5,98141186	5,861691028	33,86900132	2,13314E+19
Po	201	84	200,9822598	196,9734312	5,526399209	9,36E+02	7,40541860E-04	-3,130450388	5,79891172	5,683421617	34,3960772	2,05547E+19
Po	202	84	201,9807577	197,9720341	5,5281177	2,68E+03	2,58637008E-04	-3,587309333	5,7010517	5,58807193	34,68828738	2,03536E+19
Po	206	84	205,980474	201,972152	5,5480177	7,60E+05	9,12035764E-07	-6,039988131	5,3269513	5,223435349	35,87862083	1,81657E+19
Po	208	84	207,9812461	203,973044	5,5584176	9,15E+07	7,57537902E-09	-8,120595633	5,2153013	5,11493002	36,25717846	1,71188E+19
Po	209	84	208,9824308	204,9744822	5,5628176	3,95E+09	1,75480299E-10	-9,755771635	4,97923136	4,88386259	37,10497422	1,66946E+19
Po	210	84	209,9828741	205,9744657	5,5704176	1,20E+07	5,77622650E-08	-7,238355785	5,407457	5,30437953	35,60381676	1,59868E+19
Po	211	84	210,9866536	206,9758973	5,616568411	5,16E-01	1,34330849E+00	0,128175759	7,5944851	7,450405439	30,04165808	1,22967E+19
Po	216	84	216,0019152	211,9918977	5,6359174	1,45E-01	4,78032538E+00	0,679457459	6,9063151	6,778333882	31,4957804	1,1019E+19
Po	218	84	218,0089735	213,9998059	5,6558173	1,86E+02	3,72659774E-03	-2,428687483	6,114689	6,002421094	33,46960774	9,84526E+18

Fuente: Tabla elaborada por el autor, basada en la data de la Nuclear Data Services de la IAEA.

Hoja de cálculo de los Isótopos radiactivos del radio.

Simbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	R ₀ [fm]	T _{1/2} [s]	λ [s ⁻¹]	Log(λ)	Q _α [MeV]	K _α [MeV]	Z _D K _α ^{-1/2} [MeV]	f _{impacto} [Hz]
Ra	208	88	208,0018411	203,9914299	5,5850183	1,30E+00	5,33190139E-01	-0,273117891	7,27305509	7,133093604	32,20026825	1,34693E+20
Ra	209	88	209,0019905	204,9917188	5,5853182	4,80E+00	1,44405663E-01	-0,840415776	7,14303269	7,006231242	32,49048675	1,34458E+20
Ra	210	88	210,0004942	205,9902142	5,591718	3,70E+00	1,87337076E-01	-0,727376263	7,15080327	7,014504187	32,47132136	1,29537E+20
Ra	211	88	211,0008932	206,9907303	5,5929179	1,30E+01	5,33190139E-02	-1,273117891	7,04182308	6,908237703	32,72011451	1,28635E+20
Ra	212	88	211,9997867	207,9896347	5,5991177	1,30E+01	5,33190139E-02	-1,273117891	7,03164167	6,89887798	32,74230272	1,24074E+20
Ra	213	88	213,0003843	208,9904145	5,6020177	1,64E+02	4,22650720E-03	-2,374018387	6,86184229	6,732893311	33,14344019	1,21998E+20
Ra	214	88	214,0000997	209,9896891	5,6079177	2,46E+00	2,81767147E-01	-0,550109646	7,27251261	7,136484427	32,19261754	1,17881E+20
Ra	220	88	220,0110259	216,0002719	5,6683214	1,80E-02	3,85081767E+01	1,585552956	7,59238565	7,454254239	31,49896985	8,30391E+19
Ra	221	88	221,0139177	217,003928	5,6795228	2,80E+01	2,47552564E-02	-1,60633257	6,88039195	6,755782605	33,08724584	7,78314E+19
Ra	222	88	222,0153748	218,0056016	5,6874239	3,80E+01	1,82407153E-02	-1,738958136	6,67882429	6,558411246	33,58142556	7,43585E+19
Ra	223	88	223,0185023	219,0094804	5,6973253	9,88E+05	7,01565972E-07	-6,153931484	5,9789921	5,871681622	35,49091546	7,02276E+19
Ra	224	88	224,020212	220,0113941	5,7046263	3,16E+05	2,19350374E-06	-5,658861622	5,7888515	5,685418339	36,06759947	6,73314E+19
Ra	226	88	226,0254103	222,0175782	5,7211288	5,05E+10	1,37256867E-11	-10,86246592	4,8706225	4,784368391	39,31752259	6,12237E+19

Fuente: Tabla elaborada por el autor basada en la data de la Nuclear Data Services de la IAEA.

Hoja de cálculo de los isótopos radiactivos del torio.

Simbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	R ₀ [fm]	T _{1/2} [s]	λ [s ⁻¹]	Log(λ)	Q _α [MeV]	K _α [MeV]	Z _D K _α ^{-1/2} [MeV]	f _{impacto} [Hz]
Th	227	90	227,0277042	223,0185023	5,7488152	1,61E+06	4,305261991E-07	-6,366000415	6,146601	6,038230436	35,81193856	2,03309E+16
Th	228	90	228,0287413	224,020212	5,7488152	6,03E+07	1,149497812E-08	-7,939491851	5,5200822	5,423185322	37,78813423	2,03309E+16
Th	229	90	229,0317627	225,0236119	5,7557143	2,49E+11	2,783723617E-12	-11,55537389	5,16756102	5,07724954	39,0542604	1,95323E+16
Th	230	90	230,0331341	226,0254103	5,7670131	2,38E+12	2,912383112E-13	-12,5357515	4,76976152	4,686765268	40,64864477	1,82924E+16
Th	232	90	232,0380558	228,0310707	5,7848124	4,42E+17	1,568206291E-18	-17,80459681	4,0816014	4,011193382	43,9385653	1,6499E+16

Fuente: Tabla elaborada por el autor basada en la data de la Nuclear Data Services de la IAEA.

Hoja de cálculo de los isótopos radiactivos del uranio.

Simbolo	A	Z	M [uma]	Masa D [uma]	R ₀ [fm]	T _{1/2} [s]	λ [s ⁻¹]	Log(λ)	Q _α [MeV]	K _α [MeV]	Z _D K _α ^{-1/2} [MeV]	f _{impacto} [Hz]
U	233	92	233,0396355	229,0317627	5,820349	5,02E+12	1,380771276E-13	-12,85987826	4,90856118	4,824251628	40,97580868	4,28846E+17
U	234	92	234,0409523	230,0331341	5,829152	7,75E+12	8,943834588E-14	-13,04847624	4,8576769	4,774598334	41,18832096	4,07364E+17
U	235	92	235,0439301	231,0363046	5,833741	2,22E+16	3,122284597E-17	-16,50552751	4,678197	4,598529482	41,96942526	3,96601E+17
U	236	92	236,0455682	232,0380558	5,843138	7,39E+14	9,379528830E-16	-15,02781898	4,5728986	4,495354761	42,44832171	3,75454E+17
U	238	92	238,0507884	234,0436014	5,857133	1,41E+17	4,915937451E-18	-17,30839365	4,26975294	4,197959621	43,92617434	3,4606E+17

Fuente: Tabla elaborada por el autor basada en la data de la Nuclear Data Services de la IAEA.

Anexo C

Función asintótica de Ayri

$$y''(x) - xy(x) = 0$$

$$y(x) = \int_{\Gamma}^N f(z)e^{xz} dz$$

$$y'(x) = \int_{\Gamma}^{\Gamma} f(z)ze^{xz} dz \quad , \quad y''(x) = \int_{\Gamma}^{\Gamma} f(z)z^2e^{xz} dz$$

$$y''(x) - xy(x) = \int_{\Gamma}^n f(z)z^2e^{xz} dz - \int_{\Gamma}^n xf(z)e^{xz} dz = 0$$

$$u = xf(z) \quad , \quad dv = e^{xz} dz$$

$$du = f'(z) \quad , \quad v = \int_{\Gamma}^N e^{xz} dz = \frac{1}{x} e^{xz} \Big|_{\Gamma}$$

$$y''(x) - xy(x) = \int_{\Gamma}^N z^2 f(z)e^{xz} dz - f(z)e^{xz} \Big|_{\Gamma} + \int_{\Gamma}^N f'(z)e^{xz} dz$$

$$f(z)e^{xz} \Big|_{\Gamma} = 0$$

$$\int_{\Gamma}^n [z^2 f(z) + f'(z)]e^{xz} dz = 0$$

$$z^2 f(z) + f'(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = ce^{-z^3/3}$$

$$\Rightarrow f(z)e^{xz} \Big|_{\Gamma} = ce^{-z^3/3} e^{xz} \Big|_{\Gamma} = 0$$

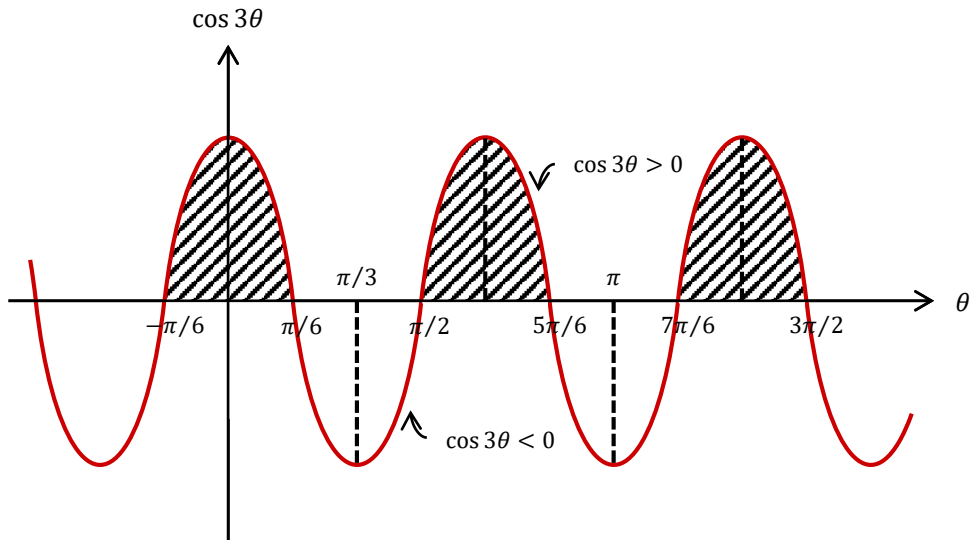
$$f(z) = 0 \quad \text{si} \quad \text{Re}(z^3) > 0$$

$$z = r e^{i\theta}$$

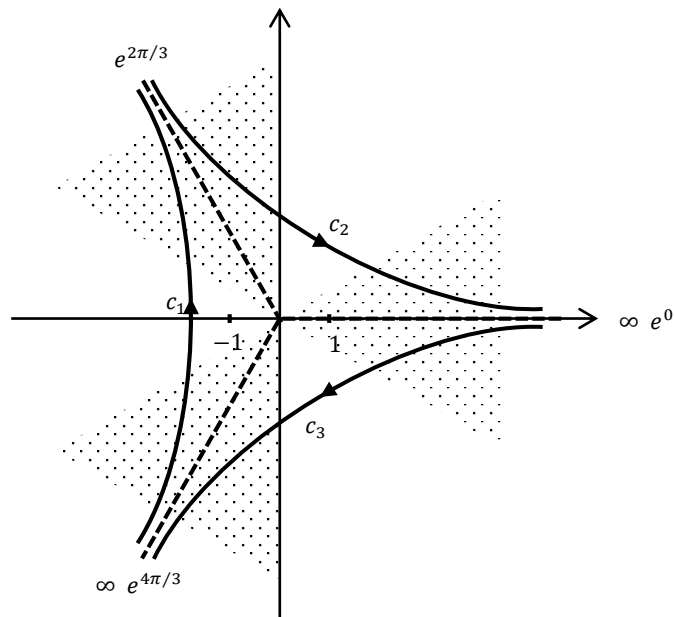
$$z^3 = r^3 e^{i3\theta} = r^3 [\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)]$$

$$\operatorname{Re}(z^3) = r^3 \cos(3\theta)$$

$$\operatorname{Re}(z^3) > 0 \rightarrow r^3 \cos(3\theta) > 0$$



$$\theta \in \langle -\pi/6, \pi/6 \rangle \cup \langle \pi/2, 5\pi/6 \rangle \cup \langle 7\pi/6, 3\pi/2 \rangle$$



$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_n}^N e^{-\frac{z^3}{3} + xz} dz; n = 1, 2, 3$$

$$f_1(z) = A_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1}^N e^{-\frac{z^3}{3} + xz} dz$$

$$x = v^2, \quad v > 0, \quad z = v\xi$$

$$A_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_1}^N e^{-\frac{(v\xi)^3}{3} + v^3\xi} v d\xi = \frac{v}{2\pi i} \int_{c_1}^N e^{v^3(\xi - \xi^3/3)} d\xi$$

$$A_i(z) = \frac{v}{2\pi i} \int_{c_1}^1 e^{v^3(z - z^3/3)} dz$$

$$h(z) = z - z^3/3$$

$$h'(z) = 1 - z^2 = 0 \rightarrow z = z_0 = \pm 1$$

Considerando $z_0 = -1$

$$h(-1) = -1 - \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \beta = \text{Im } h(z) = \text{Im } h(-1) = \text{Im} \left(-\frac{2}{3} \right) = 0 = \beta_0$$

Con $z = u + iv$

$$h(z) = u + iv - (u + iv)^3/3$$

$$h(z) = u + iv - \frac{1}{3}[u^3 + 3u^2(iv) + 3u(iv)^2 + (iv)^3]$$

$$h(z) = \frac{1}{3}u[3v^2 - u^2 + 3] + i\left[\frac{1}{3}v(v^2 - 3u^2 + 3)\right]$$

$$\text{Im}[h(z)] = \beta(u, v) = \frac{1}{3}v(v^2 - 3u^2 + 3) = 0$$

$$v = 0 \quad \vee \quad (v^2 - 3u^2 + 3) = 0$$

$$\text{Re}[h(z)] = \alpha(u, v) = \frac{1}{3}u[3v^2 - u^2 + 3]$$

$$\text{Caso: } v = 0 \rightarrow \alpha(u, 0) = u - \frac{u^3}{3}$$

$$\alpha = \alpha(-1, 0) = -\frac{2}{3} = \alpha_0 \quad ; \quad \alpha = \alpha(1, 0) = \frac{2}{3} > \alpha_0$$

$v = 0$ es el steepest ascennt panth

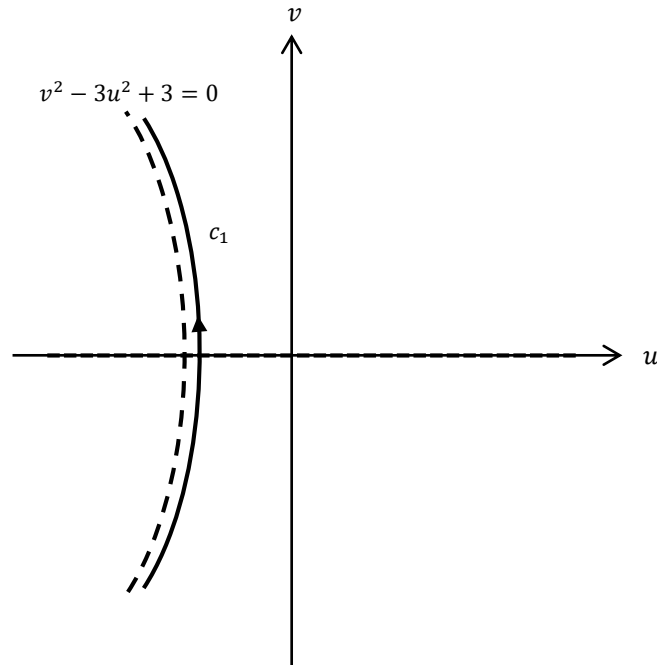
$$\text{Caso: } v^2 - 3u^2 + 3 = 0 \Rightarrow v = \sqrt{3(u^2 - 1)}, \quad u < 0$$

$$\alpha(u, v) = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{v^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} (3v^2 - 1 - \frac{v^2}{3} + 3) = -\frac{1}{3} \left(1 + \frac{v^2}{6} + \dots\right) \left(\frac{8v^2}{3} + 2\right)$$

Cerca de $z = -1$, $u = -1$ y $v \rightarrow 0$

$$\alpha = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{18}v^2 + \dots\right) \left(\frac{8}{3}v^2 + 2\right) = -\frac{8}{9}v^2 - \frac{4}{27}v^4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9}v^2 = -\frac{2}{3} - v^2 + \dots < -\frac{2}{3} = \alpha$$

$v = \sqrt{3(u^2 - 1)}$ es el steepest descent



$$h(z) - h(-1) = \tau^2, \quad h(z) = z - z^3/3$$

$$h(z) = h(-1) - \tau^2$$

$$h(-1) + h'(-1)(z - (-1)) + \frac{1}{2}h''(-1)(z - (-1))^2 + 0(z - (-1))^3 = h(-1) - \tau^2$$

$$(z + 1)^2 = -\tau^2 + \dots \Rightarrow z + 1 = \pm i\tau + \dots$$

$$z = -1 + i\tau + o(\tau^2)$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v^3(z - z^3/3)} dz = \frac{v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{v^3 \operatorname{Re}(z - z^3/3)} dz$$

$$z = -1 + i\tau$$

$$z^3 = (-1 + i\tau)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2(i\tau) + 3(-1)(i\tau)^2 + (i\tau)^3 = -1 + 3is + 3s^2 - is^3$$

$$z - \frac{z^3}{3} = -1 + i\tau + \frac{1}{3} - i\tau + \tau^2 + i\frac{s^2}{3} = -\frac{2}{3} - s^2 + i\frac{s^2}{3}$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^3(\frac{2}{3} + \tau^2)} i d\tau$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{2\pi} e^{-\frac{2}{3}v^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^3 \tau^2} d\tau, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$A_i(v^2) = \frac{v}{\pi} e^{-\frac{2}{3}v^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{v^3}} = \frac{v}{2\sqrt{\pi}} v^{-1/2} e^{-\frac{2}{3}v^3}$$

$$A_i(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \quad x \rightarrow \infty$$